BOSHI WENKU

〔数 学〕

高阶非线性发展方程中的若干问题

GAOJIE FEIXIANXING FAZHANFANGCHENGZHONG DE RUOGANWENTI

王艳萍 著

知识产权出版社



王艳萍，1968年7月出生，博士，副教授，河南鹿邑人。研究方向：非线性发展方程。1985年6月本科毕业于郑州大学数学系；1997年9月至2000年6月，在郑州大学数学系攻读硕士学位；2000年9月至2003年6月在郑州大学数学系攻读博士学位；2005年9月至2007年8月，在北京应用物理与计算数学研究所做博士后科研工作。现在郑州航空工业管理学院数理系从事数学教学和科研工作。近几年来，在数学专业学术期刊《Nonlinear Analysis》《Applied Mathematics Letters》《J. Mathematical Analysis and Applications》《Acta Mathematicae Applicatae Sinica, English Series》《数学年刊》《应用数学学报》《应用数学和力学》《数学物理学报》等刊物上发表论文16篇。主要讲授的课程有《数学分析》《泛函分析》《偏微分方程》《常微分方程》《微分几何》等。

执行编辑／王剑宇
封面设计／SUN工作室

ISBN 978-7-80247-456-7

9 787802 474567 >

ISBN 978-7-80247-456-7/O·005
(10216) 定价：22.00元

博士文库

BOSHI WENKU
〔数 学〕

高阶非线性发展方程中的若干问题

GAOJIE FEIXIANXING FAZHANFANGCHENGZHONG DE RUOGANWENTI

王艳萍 著

知识产权出版社

内容提要

本书是作者在博士和博士后两个阶段的工作成果的总结，内容主要由两部分组成，一部分是以弹性力学为背景的几类模型方程的定解问题，另一部分是几类非线性发展方程的时间周期问题。本书具有一定学术价值，具有可读性。

责任编辑：李　琳　　**责任校对**：董志英
执行编辑：王剑宇　　**责任出版**：卢运霞

图书在版编目（CIP）数据

高阶非线性发展方程中的若干问题／王艳萍著. —北京：知识产权出版社，2009.5
ISBN 978－7－80247－456－7
Ⅰ. 高…　Ⅱ. 王…　Ⅲ. 非线性方程　Ⅳ. O175
中国版本图书馆 CIP 数据核字（2009）第 069080 号

高阶非线性发展方程中的若干问题
王艳萍　著

出版发行：知识产权出版社

社　址：北京市海淀区马甸南村 1 号	**邮　编**：100088
网　址：http：//www. ipph. cn	**邮　箱**：bjb@ cnipr. com
发行电话：010－82000893　82000860 转 8101	**传　真**：010－82000893
责编电话：010－82000860 转 8225	**责编邮箱**：wangjianyu@ cnipr. com
印　刷：知识产权出版社电子制印中心	**经　销**：新华书店及相关销售网点
开　本：880mm×1230mm　1/32	**印　张**：6.5
版　次：2009 年 5 月第一版	**印　次**：2009 年 5 月第一次印刷
字　数：200 千字	**定　价**：22.00 元

ISBN 978－7－80247－456－7/O・005（10216）

目　录

第一章　一类广义 Boussinesq 型方程的 Cauchy 问题

第一节　引　　言

本章考虑如下广义 Boussinesq 型方程的初值问题。

$$u_{tt}-u_{xx}-u_{xxtt}+\alpha u_{x^4}+\beta u_{x^4t^2}=f(u)_{xx},\ x\in R,\ t>0 \quad (1.1.1)$$

$$u(x,\ 0)=\varphi(x),\ u_t(x,\ 0)=\psi(x),\ x\in R \quad (1.1.2)$$

其中，$u(x,\ t)$表示未知函数，$u_{x^4}=u_{xxxx}$，$u_{x^4t^2}=u_{xxxxtt}$，$f(s)$是给定的非线性函数，$\alpha>0$ 和$\beta>0$ 是常数，$\varphi(x)$和$\psi(x)$是已知的初值函数。

有很多具有主项 $u_{tt}-u_{xxtt}$或 $u_{tt}+u_{xxxx}$的方程，这些主项与方程(1.1.1)密切相关. 在弱耗散介质中的非线性波的传播由 Boussinesq 型方程

$$u_{tt}-u_{xx}+u_{xxxx}=(u^2)_{xx}$$

和 Boussinesq 型方程

$$u_{tt}-u_{xx}-u_{xxtt}=(u^2)_{xx}$$

控制[1, 2]. 弹性杆中的纵向形变波的传播模型由偏微分方程

$$u_{tt}-u_{xx}-u_{xxtt}=\frac{1}{p}(u^p)_{xx} \quad (1.1.3)$$

描述，其中 $p=3$ 或 $p=5$。这个方程就是所谓的 Pochhammer－Chree(PC)方程[3]。

在一些波导杆中非线性波的传播问题中，杆的纵向位移 $u(x,t)$满足方程

$$u_{tt}-u_{xx}-u_{xxtt}=\frac{1}{p}(u^p)_{xx}u_{tt}-u_{xx}=\frac{1}{4}(6u^2+au_{tt}-bu_{xx})_{xx} \quad (1.1.4)$$

这个方程可以通过利用哈密顿原理得到[4,5]. 同样的方法，也可以得到如下方程

$$u_{tt}-u_{xx}=\frac{1}{4}(cu^3+6u^2+au_{tt}-bu_{xx})_{xx} \qquad (1.1.5)$$

文献[6]在研究具有微观结构的圆柱型弹性杆内部非线性纵向应变孤立子波的时候，通过使用 Cosserat 模型和 Le Roux 连续型模型，使问题得到解决。文献中曾经讨论过一种过程，描述纵向非线性应变波传播时的方程。控制这个过程的模型方程属于 Boussinesq 型，即通常所说的双耗散方程

$$u_{tt}-\alpha_1 u_{xx}-\alpha_2(u^2)_{xx}-\alpha_3 u_{xxtt}+\alpha_4 u_{xxxx}=0, \qquad (1.1.6)$$

其中，系数 α_1，α_2，α_3，α_4 都是依赖于感材料的弹性参数，并且 α_1，α_3，$\alpha_4>0$。

文献[7]导出了描述具有表面张力的水波方程

$$u_{tt}-u_{xx}-u_{xxtt}+\alpha u_{x^4}+\beta u_{x^4t^2}=(u^2)_{xx} \qquad (1.1.7)$$

对于方程(1.1.3) - (1.1.5)，已经有很多的研究结果[8 - 12]。文献[13]的作者研究了方程(1.1.6)和方程(1.1.7)的初边值问题，作者证明了方程(1.1.7)的初边值问题整体广义解和整体古典解的存在性和唯一性。同时，文献[13]还给出了方程(1.1.6)的初边值问题整体解不存在的充分条件. 至于初值问题(1.1.1)、(1.1.2)，至今还没有见到相关的研究结果。

本章的目的就是证明在某些条件下，问题(1.1.1)、(1.1.2)有唯一的整体解，并且也将给出问题(1.1.1)，(1.1.2)的整体解不存在的充分条件。

本章采用如下这些记号：L^2 表示通常的所有 R 上的 L^2 - 函数构成的空间，具有范数 $\|u\| = \|u\|_{L^2}$；H^s 表示通常的 R 上的 Sobolev，具有范数

$$\|u\|_{H^s} = \| (I-\partial_x{}^2)^{\frac{s}{2}}u \| = \| (1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}}\hat{u} \|$$

$\dot{H}^s$ 表示 R 上相应的具有半范数 $\|u\|_{\dot{H}^s} = \| |\xi|^s \hat{u} \|$ 的齐次空间，

其中，$s\in R$，I 是单位算子，$\hat{u}(\xi,t)$ 是 $u(x,t)$ 关于变量 x 的 Fourier 变换，即

$$\hat{u}(\xi,t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-ix\xi}u(x,t)\mathrm{d}x。$$

首先，给出几个后面要用到的引理。

引理 1.1.1　(Sobolev 嵌入定理)对 $s\geqslant 1$，$H^s\to C(R)\cap L^\infty$ 成立，其中"→"表示嵌入关系。

引理 1.1.2　假定 $f\in C^{[s]+1}(R)$，$f(0)=0$，$s\geqslant 1$，那么，对 $u\in H^s$，有

$$\|f(u)\|_{H^s}\leqslant C_0(\|u\|_\infty)\|u\|_{H^s}$$

其中，$C_0(\|u\|_\infty)$ 是依赖于 $\|u\|_\infty$ 的常数。

引理 1.1.3　假定 s_1，$s_2\geqslant s>\frac{1}{2}$，则对于 $u\in H^{S_1}$，$u\in H^{S_2}$，存在着估计式

$$\|uv\|_{H^s}\leqslant C_1\|u\|_{H^{S_1}}\|v\|_{H^{S_2}}$$

其中，C_1 是与 u 和 v 无关的常数。

上述这些引理都可以在文献[14]中找到。

本章的安排是这样的：在第二节中，通过利用压缩映射原理证明问题(1.1.1)、(1.1.2)的局部强解的存在性和唯一性；在第三节中，证明问题(1.1.1)、(1.1.2)整体解的存在性和唯一性；在第四节中，讨论问题(1.1.1)、(1.1.2)的整体解不存在性。

第二节　问题(1.1.1)，(1.1.2)的局部解的存在性和唯一性

首先考虑线性问题。

$$u_{tt}-u_{xx}-u_{xxtt}+\alpha u_{x^4}+\beta u_{x^4t^2}=g(x,t),\ x\in R,\ t>0 \tag{1.2.1}$$

$$u(x,0)=\varphi(x),\ u_t(x,0)=\psi(x) \tag{1.2.2}$$

引理 2.1.1 假定 $\varphi\in H^s$，$\psi\in H^s$，$g\in L^\infty(0,T;H^{s-2})$，$s\in R$，

$T>0$，则问题(2.1.1)，(2.1.2)有唯一的解

$$u\in C([0,\ T];H^s)\cap C^1([0,\ T];H^s)\cap C^2([0,\ T];H^s)$$

并且成立估计式

$$\begin{aligned}&\|u(\cdot,\ t)\|_{H^s}+\|u_t(\cdot,\ t)\|_{H^s}+\|u_{tt}(\cdot,\ t)\|_{H^s}\\ \leqslant&(1+2k_0)\|\varphi\|_{H^s}+(t+k_0+1)\|\psi\|_{H^s}\\ &+\|g(\cdot,\ t)\|_{H^{s-2}}+[2(t+\frac{1}{\sqrt{\alpha\beta}})+1\\ &+k_0]\int_0^t\|g(\cdot,\ \tau)\|_{H^{s-2}}\mathrm{d}\tau,\ 0\leqslant t\leqslant T\end{aligned}\tag{1.2.3}$$

其中 $k_0=\sqrt{\max\{1,\ \frac{\alpha}{\beta}\}}$

证明　与文献[15]中的过程相似，可以得到问题解的存在性与唯一性。显然

$$\begin{aligned}\hat{u}(\xi,\ t)=&\hat{\varphi}(\xi)\cos(t\left|\xi\right|\sqrt{\frac{1+\alpha\xi^2}{1+\xi^2+\beta\xi^4}})\\ &+\frac{1}{\left|\xi\right|}\hat{\psi}(\xi)\sqrt{\frac{1+\xi^2+\beta\xi^4}{1+\alpha\xi^2}}\sin(t\left|\xi\right|\sqrt{\frac{1+\alpha\xi^2}{1+\xi^2+\beta\xi^4}})\\ &+\frac{1}{\left|\xi\right|}\sqrt{\frac{1+\xi^2+\beta\xi^4}{1+\alpha\xi^2}}\int_0^t\hat{g}(\xi,\ \tau)\frac{1}{1+\xi^2+\beta\xi^4}\\ &\sin((t-\tau)\left|\xi\right|\sqrt{\frac{1+\alpha\xi^2}{1+\xi^2+\beta\xi^4}})\mathrm{d}\tau\end{aligned}\tag{1.2.4}$$

注意到

$$\|(1+\xi^2)^{\frac{s}{2}}\hat{\varphi}\cos(t\left|\xi\right|\sqrt{\frac{1+\alpha\xi^2}{1+\xi^2+\beta\xi^4}})\|\leqslant\|(1+\xi^2)^{\frac{s}{2}}\hat{\varphi}\|\tag{2.1.5}$$

$$\|(1+\xi^2)^{\frac{s}{2}}\frac{1}{\left|\xi\right|}\hat{\psi}(\xi)\sqrt{\frac{1+\xi^2+\beta\xi^4}{1+\alpha\xi^2}}\sin(t\left|\xi\right|\sqrt{\frac{1+\alpha\xi^2}{1+\xi^2+\beta\xi^4}})\|^2$$

$$\leqslant t^2\int_R(1+\xi^2)^s\hat{\psi}^2(\xi)d\xi \tag{1.2.6}$$

$$\|(1+\xi^2)^{\frac{s}{2}}\hat{g}(\xi,\tau)\frac{1}{|\xi|}\sqrt{\frac{1+\xi^2+\beta\xi^4}{1+\alpha\xi^2}}\frac{1}{1+\xi^2+\beta\xi^4}$$

$$\sin((t-\tau)|\xi|\sqrt{\frac{1+\alpha\xi^2}{1+\xi^2+\beta\xi^4}}t)\|^2$$

$$\leqslant\int_{|\xi|\leqslant 1}(1+\xi^2)^s(t-\tau)^2\hat{g}^2(\xi,\tau)\frac{1}{(1+\xi^2+\beta\xi^4)^2}d\xi$$

$$+\int_{|\xi|\geqslant 1}(1+\xi^2)^s\hat{g}^2(\xi,\tau)\frac{1}{\alpha\beta\xi^8}d\xi$$

$$\leqslant 4t^2\int_{|\xi|\leqslant 1}(1+\xi^2)^{s-2}\hat{g}^2(\xi,\tau)d\xi$$

$$+\frac{4}{\alpha\beta}\int_{|\xi|\geqslant 1}(1+\xi^2)^{s-2}\hat{g}^2(\xi,\tau)d\xi$$

$$\leqslant 4(t^2+\frac{1}{\alpha\beta})\int_R(1+\xi^2)^{s-2}\hat{g}^2(\xi,\tau)d\xi \tag{1.2.7}$$

由(1.2.5) - (1.2.7)，可以得到

$$\|u\|_{H^s}\leqslant\|\varphi\|_{H^s}+t\|\psi\|_{H^s}$$

$$+2(t+\frac{1}{\sqrt{\alpha\beta}})\int_0^t\|g(\cdot,\tau)\|_{H^{s-2}}d\tau. \tag{1.2.8}$$

由(1.2.4)可得

$$\hat{u}_t(\xi,t)=-\hat{\varphi}(\xi)|\xi|\sqrt{\frac{1+\alpha\xi^2}{1+\xi^2+\beta\xi^4}}\sin(t|\xi|\sqrt{\frac{1+\alpha\xi^2}{1+\xi^2+\beta\xi^4}})$$

$$+\hat{\psi}(\xi)\cos(t|\xi|\sqrt{\frac{1+\alpha\xi^2}{1+\xi^2+\beta\xi^4}})$$

$$+\int_0^t\hat{g}(\xi,\tau)\frac{1}{1+\xi^2+\beta\xi^4}$$

$$\cos(|\xi|\sqrt{\frac{1+\alpha\xi^2}{1+\xi^2+\beta\xi^4}}(t-\tau))d\tau \tag{1.2.9}$$

$$\hat{u}_{tt}(\xi,t)=-\hat{\varphi}(\xi)\xi^2\frac{1+\alpha\xi^2}{1+\xi^2+\beta\xi^4}\cos\left(t\left|\xi\right|\sqrt{\frac{1+\alpha\xi^2}{1+\xi^2+\beta\xi^4}}\right)$$

$$-\hat{\psi}(\xi)\left|\xi\right|\sqrt{\frac{1+\alpha\xi^2}{1+\xi^2+\beta\xi^4}}\sin\left(t\left|\xi\right|\sqrt{\frac{1+\alpha\xi^2}{1+\xi^2+\beta\xi^4}}\right)$$

$$+\frac{1}{1+\xi^2+\beta\xi^4}\hat{g}(\xi,t)-\int_0^t\hat{g}(\xi,\tau)\frac{1}{1+\xi^2+\beta\xi^4}$$

$$\left|\xi\right|\sqrt{\frac{1+\alpha\xi^2}{1+\xi^2+\beta\xi^4}}\sin\left(\left|\xi\right|\sqrt{\frac{1+\alpha\xi^2}{1+\xi^2+\beta\xi^4}}(t-\tau)\right)\mathrm{d}\tau. \tag{1.2.10}$$

注意到

$$\left\|(1+\xi^2)^{\frac{s}{2}}\hat{\varphi}(\xi)\left|\xi\right|\sqrt{\frac{1+\alpha\xi^2}{1+\xi^2+\beta\xi^4}}\sin\left(t\left|\xi\right|\sqrt{\frac{1+\alpha\xi^2}{1+\xi^2+\beta\xi^4}}\right)\right\|^2$$

$$\leqslant\int_R(1+\xi^2)^s\hat{\varphi}^2(\xi)\frac{\xi^2(1+\alpha\xi^2)}{1+\xi^2+\beta\xi^4}d\xi$$

$$\leqslant k_0^2\int_R(1+\xi^2)^s\hat{\varphi}^2(\xi)d\xi=k_0^2\|\varphi\|_{H^s}^2 \tag{1.2.11}$$

$$\left\|(1+\xi^2)^{\frac{s}{2}}\hat{\psi}(\xi)\cos\left(t\left|\xi\right|\sqrt{\frac{1+\alpha\xi^2}{1+\xi^2+\beta\xi^4}}\right)\right\|\leqslant\|\psi\|_{H^s} \tag{1.2.12}$$

$$\left\|(1+\xi^2)^{\frac{s}{2}}\hat{g}(\xi,\tau)\frac{1}{1+\xi^2+\beta\xi^4}\cos\left(\left|\xi\right|\sqrt{\frac{1+\alpha\xi^2}{1+\xi^2+\beta\xi^4}}(t-\tau)\right)\right\|^2$$

$$\leqslant\int_R(1+\xi^2)^s\hat{g}^2(\xi,\tau)\frac{1}{(1+\xi^2+\beta\xi^4)^2}d\xi$$

$$\leqslant\|g(\cdot,\tau)\|_{H^{s-2}}^2 \tag{1.2.13}$$

把(1.2.11)－(1.2.13)代入(1.2.9)，可得

$$\|u_t(\cdot,t)\|\leqslant k_0\|\varphi\|_{H^s}+\|\psi\|_{H^s}+\int_0^t\|g(\cdot,\tau)\|_{H^{s-2}}\mathrm{d}\tau \tag{1.2.14}$$

同样地，有

$$\| (1+\xi^2)^{\frac{s}{2}}\hat{\varphi}(\xi)\xi^2 \frac{1+\alpha\xi^2}{1+\xi^2+\beta\xi^4}\cos(t\left|\xi\right|\sqrt{\frac{1+\alpha\xi^2}{1+\xi^2+\beta\xi^4}})\|$$
$$\leqslant k_0 \|\varphi\|_{H^s} \tag{1.2.15}$$

$$\| (1+\xi^2)^{\frac{s}{2}}\hat{\psi}(\xi)\left|\xi\right|\sqrt{\frac{1+\alpha\xi^2}{1+\xi^2+\beta\xi^4}}\sin(t\left|\xi\right|\sqrt{\frac{1+\alpha\xi^2}{1+\xi^2+\beta\xi^4}})\|$$
$$\leqslant k_0 \|\psi\|_{H^s} \tag{1.2.16}$$

$$\| (1+\xi^2)^{\frac{s}{2}}\frac{1}{1+\xi^2+\beta\xi^4}\hat{g}(\xi,t)\| \leqslant \|g(\cdot,t)\|_{H^{s-2}} \tag{1.2.17}$$

$$\| (1+\xi^2)^{\frac{s}{2}}\frac{1}{1+\xi^2+\beta\xi^4}\hat{g}(\xi,\tau)\left|\xi\right|\sqrt{\frac{1+\alpha\xi^2}{1+\xi^2+\beta\xi^4}}$$
$$\sin(\left|\xi\right|\sqrt{\frac{1+\alpha\xi^2}{1+\xi^2+\beta\xi^4}}(t-\tau))\| \leqslant k_0 \|g(\cdot,t)\|_{H^{s-2}} \tag{1.2.18}$$

把(1.2.15)－(1.2.18)代入(1.2.10)，得

$$\|u_{tt}(\cdot,t)\| \leqslant k_0\|\varphi\|_{H^s} + k_0\|\psi\|_{H^s} + \|g(\cdot,t)\|_{H^{s-2}} + k_0\int_0^t \|g(\cdot,\tau)\|_{H^{s-2}}\mathrm{d}\tau \tag{1.2.19}$$

由(1.2.8)，(1.2.14)和(1.2.19)知道(1.2.3)成立。引理得证。

对 M，$T>0$，$\varphi\in H^s$，$\psi\in H^s$ 定义

$X(M,T)=\{w\mid w\in C([0,T];H^s)\cap C^1([0,T];H^s)\cap C^2([0,T];H^s)$，$w(x,0)=\varphi(x)$，$w_t(x,0)=\psi(x)$，$\max[\|w(\cdot,t)\|_{H^s}+\|w_t(\cdot,t)\|_{H^s}+\|w_{tt}(\cdot,t)\|_{H^s}]\leqslant M\}$

定义 $X(M,T)$ 中的距离为

$d(w,\bar{w})=\max[\|w-\bar{w}\|_{H^s}^2+\|w_t-\bar{w}_t\|_{H^s}^2+\|w_{tt}-\bar{w}_{tt}\|_{H^s}^2]^{\frac{1}{2}}$，$\forall w,\bar{w}\in X(M,T)$

对 $w\in X(M,T)$ 和 $f\in C^2(R)$，考虑线性方程

$$u_{tt}-u_{xx}-u_{xxtt}+\alpha u_{x^4}+\beta u_{x^4t^2}=f(w)_{xx} \tag{1.2.20}$$

假定$f(0)=0$，若不然，用$f(u)-f(0)$代替$f(u)$。

定义S是把w映到方程(1.2.20)的唯一解的映射. 下面证明对适当选择的M和T，映射S在$X(M,T)$中有唯一的不动点。

引理 1.2.2 假定$s\geqslant 1$，$\varphi\in H^s$，$\psi\in H^s$，和$f\in C^{[s]+2}(R)$，则对充分大的M和相对于M充分小的T，S映$X(M,T)$到$X(M,T)$。

证明 对M，$T>0$和$w\in X(M,T)$，由引理1.2.1得

$$\begin{aligned}&\|u(\cdot,t)\|_{H^s}+\|u_t(\cdot,t)\|_{H^s}+\|u_{tt}(\cdot,t)\|_{H^s}\\ \leqslant&(1+2k_0)\|\varphi\|_{H^s}+(t+k_0+1)\|\psi\|_{H^s}\\ &+\|f(w(\cdot,t))_{xx}\|_{H^{s-2}}+[2(t+\frac{1}{\sqrt{\alpha\beta}})\\ &+1+k_0]\int_0^t\|f(w(\cdot,\tau))_{xx}\|_{H^{s-2}}\mathrm{d}\tau\end{aligned} \tag{1.2.21}$$

利用 Sobolev 嵌入定理和引理1.1.2，得

$$\begin{aligned}\|f(w(\cdot,t))_{xx}\|_{H^{s-2}}\leqslant\|f(w(\cdot,t))\|_{H^s}&\leqslant C_0(M)\|w\|_{H^s}\\ &\leqslant C_0(M)M.\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}&[2(t+\frac{1}{\sqrt{\alpha\beta}})+1+k_0]\int_0^t\|f(w(\cdot,\tau))_{xx}\|_{H^{s-2}}\mathrm{d}\tau\\ &\qquad\leqslant C_0(M)MT[2(t+\frac{1}{\sqrt{\alpha\beta}})+1+k_0].\end{aligned} \tag{1.2.22}$$

利用引理1.1.2，可得

$$\begin{aligned}&\|f(w(\cdot,t))_{xx}\|_{H^{s-2}}\\ =&\|f(w(\cdot,0))+\int_0^t f(w(\cdot,\tau))_\tau\|_{H^s}\mathrm{d}\tau\\ \leqslant&C_0\|\varphi\|_{H^s}+C_1(M)C_0(M)M^2T,\end{aligned} \tag{1.2.23}$$

其中C_0是与M无关的常数. 由(1.2.21)－(1.2.23)可得

$$\begin{aligned}&\|u(\cdot,t)\|_{H^s}+\|u_t(\cdot,t)\|_{H^s}+\|u_{tt}(\cdot,t)\|_{H^s}\\ \leqslant&[1+2k_0+C_0]\|\varphi\|_{H^s}+(T+k_0+1)\|\psi\|_{H^s}\end{aligned}$$

$$+C_0(M)C_1(M)M^2T+[2(T+\frac{1}{\sqrt{\alpha\beta}})+1+k_0]C_0(M)MT \tag{1.2.24}$$

如果 M 和 T 满足

$$M\geqslant 2[(1+2k_0+C_0)\|\varphi\|_{H^s}+(k_0+2)\|\psi\|_{H^s}] \tag{1.2.25}$$

$$T\leqslant\min\left\{1,\ \frac{1}{2}\{C_0(M)C_1(M)M+C_0(M)[2(1+\frac{1}{\sqrt{\alpha\beta}})+1+k_0]\}^{-1}\right\} \tag{1.2.26}$$

则(1.2.24)式的右端不超过 M，所以

$$\|(Sw)(t)\|_{H^s}+\|(Sw)_t(t)\|_{H^s}+\|(Sw)_{tt}(t)\|_{H^s}\leqslant M,\quad \forall w\in X(M,\ T).$$

引理 1.2.3　假定引理 1.2.2 的条件成立，$f\in C^{[s]+3}$。若 M 充分大且 T 相对于 M 足够小，则映射 $S:X(M,\ T)\to X(M,\ T)$ 是严格压缩的。

证明　设 M，$T>0$ 和 w_1，$w_2\in X(M,\ T)$. 记 $u_1=Sw_1$，$u_2=Sw_2$，$U=u_1-u_2$，$W=w_1-w_2$。显然 U 满足如下 Cauchy 问题。

$$U_{tt}-U_{xx}-U_{xxtt}+\alpha U_{x^4}+\beta U_{x^4tt}=f(w_1)_{xx}-f(w_2)_{xx},$$
$$U(x,\ 0)=U_t(x,\ 0)=0$$

由引理 1.2.1 知道

$$\|U(t)\|_{H^s}+\|U_t(t)\|_{H^s}+\|U_{tt}(t)\|_{H^s}$$
$$\leqslant\|f(w_1)_{xx}-f(w_2)_{xx}\|_{H^{s-2}}+[2(t+\frac{1}{\sqrt{\alpha\beta}})+1+k_0]\int_0^t\|f(w_1)_{xx}-f(w_2)_{xx}\|_{H^{s-2}}\mathrm{d}\tau, \tag{1.2.27}$$

利用引理 1.1.1－1.1.3，可得

$$\int_0^t\|f(w_1)_{xx}-f(w_2)_{xx}\|_{H^{s-2}}\mathrm{d}\tau$$

$$\leqslant \int_0^t \| f(w_1) - f(w_2) \|_{H^s} \mathrm{d}\tau$$

$$= \int_0^t \| f'(w_2 + \theta_1(w_1 - w_2))(w_1 - w_2) \|_{H^s} \mathrm{d}\tau$$

$$\leqslant 3MC_1(M)T\max \| W \|_{H^s} \tag{1.2.28}$$

$$\| f(w_1)_{xx} - f(w_2)_{xx} \|_{H^{s-2}}$$

$$\leqslant \| f(w_1) - f(w_2) \|_{H^s}$$

$$= \| \int_0^t [f(w_1)_\tau - f(w_2)_\tau] \mathrm{d}\tau \|_{H^s}$$

$$= \int_0^t \| f''(w_2 + \theta_2(w_1 - w_2)) W w_{1\tau} + f'(w_2) W_\tau \|_{H^s} \mathrm{d}\tau$$

$$\leqslant 3C_0(M)C_1(M)MT(M+1)\max(\| W \|_{H^s} + \| W_t \|_{H^s}). \tag{1.2.29}$$

把(1.2.28)，(1.2.29)代入(1.2.27)，有

$$\| U(t) \|_{H^s} + \| U_t(t) \|_{H^s} + \| U_{tt}(t) \|_{H^s}$$

$$\leqslant 3C_0(M)C_1(M)MT(M+1)\max(\| W \|_{H^s} + \| W_t \|_{H^s})$$

$$+3[2(T+\frac{1}{\sqrt{\alpha\beta}})+1+k_0]C_1(M)MT\max \| W \|_{H^s}.$$

由此知道，如果 M 和 T 满足(1.2.25)，(1.2.26) 以及

$$T \leqslant \min\left\{1, \frac{1}{6}\left\{C_0(M)C_1(M)M(M+1) + [1+k_0+2(1+\frac{1}{\sqrt{\alpha\beta}})]C_1(M)M\right\}^{-1}\right\},$$

则 S 映 $X(M, T)$ 到 $X(M, T)$，并且是严格压缩的. 引理证毕。

定理 1.2.1 假定 $s \geqslant 1$，$\varphi \in H^s$，$\psi \in H^s$ 以及 $f \in C^{[s]+3}(R)$，则问题(1.1.1)，(1.1.2)有唯一的局部解 $u(x, t)$，解的最大定义区间是$[0, T_0)$ $(T_0 > 0)$，并且 $u \in C([0, T_0); H^s) \cap C^1([0, T_0); H^s) \cap C^2([0, T_0); H^s)$。如果

$$\sup_{t\in[0, T_0)}[\| u(t) \|_{H^s} + \| u_t(t) \|_{H^s} + \| u_{tt}(t) \|_{H^s}] < \infty, \tag{1.2.30}$$

则 $T_0=\infty$。

证明　和文献[16]中定理3.1的证明方法相同，借助于压缩映射原理，利用引理1.2.2和引理1.2.3，容易得到定理的结果。

第三节　问题(1.1.1)，(1.1.2)整体解的存在性和唯一性

首先给出问题(1.1.1)，(1.1.2)的局部解的先验估计。

引理1.3.1　假定定理1.2.1的条件成立，并且 $\psi\in\dot{H}^{-1}$；$f'(s)$ 下方有界，即存在常数 A 使得 $f'(s)\geqslant A$ 成立；$F(\varphi)\in L^1$，其中 $F(s)=\int_0^s f(\tau)\mathrm{d}\tau$. 则

$$E_1(t)=\|u_t\|_{\dot{H}^{-1}}^2+\|u\|^2+\|u_t\|^2+\alpha\|u_x\|^2+\beta\|u_{xt}\|^2\leqslant M_1(T),\ \forall t\in[0,T],\tag{1.3.1}$$

这里及后面出现的 $M_i(T)(i=1,2)$ 都是依赖于 T 的常数。

证明　令 $f_0(s)=f(s)-A_0s$，$A_0=\min\{0,A\}$。则 $A_0\leqslant0$，$f_0(0)=0$，$f_0(s)$ 是单调增的。因而 $F_0(s)=\int_0^s f_0(\tau)\mathrm{d}\tau\geqslant0$。通过直接计算并利用方程(1.1.1)，可得

$$\begin{aligned}\frac{d}{\mathrm{d}t}E_1(t)&=2(\widehat{u_t},|\xi|^{-2}\widehat{u_{tt}})+2(\widehat{u_t},\hat{u})+2(\widehat{u_t},\widehat{u_{tt}})\\&\quad+2\alpha(\widehat{u_t},|\xi|^2\hat{u})+2\beta(\widehat{u_t},|\xi|^2\widehat{u_{tt}})\\&=-2(\widehat{u_t},\widehat{f_0(u)}+A_0\hat{u}),\end{aligned}\tag{1.3.2}$$

其中 $(\cdot,\cdot)$ 表示 L^2 空间的内积. 对等式(1.3.2)在 $[0,t]$ 上积分，并利用 Cauchy 不等式，得

$$\begin{aligned}&E_1(t)+2\int_{-\infty}^{+\infty}F_0(u(x,t))\mathrm{d}x\\&\leqslant E_1(0)+2\int_{-\infty}^{+\infty}F_0(\varphi(x))\mathrm{d}x-A_0\int_0^t(\|u\|^2+\|u_\tau\|^2)\mathrm{d}\tau\end{aligned}\tag{1.3.3}$$

由 Gronwall 不等式知道，(1.3.3)式表明(1.3.1)成立。

引理 1.3.2 在引理 1.3.1 的条件成立时，如果 $\varphi \in H^{s+2}$，$\psi \in H^{s+2}$，则

$$\| u(\cdot, t) \|_{H^{s+2}} + \| u_t(\cdot, t) \|_{H^{s+2}} \leqslant M_2(T), \ \forall t \in [0, T]. \tag{1.3.4}$$

证明 方程(1.1.1)的两端同乘以 $u_{x^{2s}t}$，然后在 R 上积分，利用分部积分可得

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\left[\| u_{x^s t}(\cdot, t) \|^2 + \| u_{x^{s+1}}(\cdot, t) \|^2 + \| u_{x^{s+1}t}(\cdot, t) \|^2 \right.\\&\quad \left. + \alpha \| u_{x^{s+2}}(\cdot, t) \|^2 + \beta \| u_{x^{s+2}t}(\cdot, t) \|^2 \right]\\&= -2(f(u)_{x^{s+1}}, u_{x^{s+1}t})\end{aligned} \tag{1.3.5}$$

由引理 1.3.1 和 Sobolev 嵌入定理，$u \in L^\infty$. 利用引理 1.1.2，有

$$\begin{aligned}\left| (f(u)_{x^{s+1}}, u_{x^{s+1}t}) \right| &\leqslant C_0(\|u\|_{L^\infty})(\| u(\cdot, t) \|\\&\quad + \| u_{x^{s+1}}(\cdot, t) \|) \| u_{x^{s+1}t}(\cdot, t) \|\end{aligned} \tag{1.3.6}$$

把(1.3.6)代入(1.3.5)后，两端在$[0, t]$上积分，并利用 Young 不等式和 Gronwall 不等式，有

$$\begin{aligned}&\| u_{x^s t}(\cdot, t) \|^2 + \| u_{x^{s+1}}(\cdot, t) \|^2 + \| u_{x^{s+1}t}(\cdot, t) \|^2\\&\quad + \alpha \| u_{x^{s+2}}(\cdot, t) \|^2 + \beta \| u_{x^{s+2}t}(\cdot, t) \|^2 \leqslant M_2(T).\end{aligned} \tag{1.3.7}$$

(1.3.1)和(1.3.7)表明(1.3.4)成立。

定理 3.1 假定 $s \geqslant 1$，$\varphi \in H^{s+2}$，$\psi \in H^{s+2} \cap \dot{H}^{-1}$，$f \in C^{[s]+3}(R)$，$f'(s)$下方有界且 $F(\varphi) \in L^1$。则问题(1.1.1)，(1.1.2)有唯一的广义解 $u(x, t)$，定义在区间$[0, \infty)$上，并且 $u \in C([0, \infty); H^{s+2}(R)) \cap C^1([0, \infty); H^{s+2}(R)) \cap C^2([0, \infty); H^{s+2}(R))$。

证明 根据定理 1.2.1，只需证明

$$\begin{aligned}&\sup_{t \in [0, T_0)} \left[\| u(\cdot, t) \|_{H^{s+2}} + \| u_t(\cdot, t) \|_{H^{s+2}} \right.\\&\quad \left. + \| u_{tt}(\cdot, t) \|_{H^{s+2}} \right] < \infty\end{aligned} \tag{1.3.8}$$

注意到引理 1.3.2，利用方程(1.1.1)，有

$$\|u_{tt}(\cdot,t)\|_{H^{s+2}}\leqslant(1+\alpha)\|u(\cdot,t)\|_{H^{s+2}}+\|f(u(\cdot,t))\|_{H^{s+2}}$$
$$\leqslant[1+\alpha+C_0(M_2(T))]\|u(\cdot,t)\|_{H^{s+2}}$$

注意到(1.3.4)，可知(1.3.8)成立。

注 3.1　如果 $s\geqslant\frac{5}{2}$，利用 Sobolev 嵌入定理，有

$u\in C([0,\infty);C^4(R))\cap C^1([0,\infty);C^4(R))$

$\cap C^2([0,\infty);C^4(R))$。因而，当 $s\geqslant\frac{5}{2}$ 时，定理 1.3.1 中的解 $u(x,t)$ 是问题(1.1.1)，(1.1.2)的整体古典解。

第四节　问题(1.1.1)，(1.1.2)整体解的不存在性

引理 1.4.1　(见[11]，[17]) 假定正的二次可微函数 $H(t)$ 对 $\forall t\geqslant0$，$\ddot{H}H-(1+\delta)\dot{H}^2\geqslant0$ 成立，其中 $\delta>0$ 是常数. 若 $H(0)>0$，$\dot{H}(0)>0$，则存在 $t_1\leqslant\frac{H(0)}{\delta\dot{H}(0)}$，使得当 $t\to t_1$ 时，$H(t)\to\infty$。

引理 1.4.2　假定 $f\in C(R)$，$F(s)=\int_0^s f(\tau)\mathrm{d}\tau$，$\varphi\in H^1$，$\psi\in H^1\cap\dot{H}^{-1}$，$F(\varphi)\in L^1$. $u(x,t)$ 是问题(1.1.1)，(1.1.2)的解，则

$$E(t)=\|u_t(\cdot,t)\|^2_{\dot{H}^{-1}}+\|u(\cdot,t)\|^2+\|u_t(\cdot,t)\|^2+\alpha\|u_x(\cdot,t)\|^2+\beta\|u_{xt}(\cdot,t)\|^2+2\int_{-\infty}^{+\infty}F(u(x,t))\mathrm{d}x=E(0)\tag{1.4.1}$$

证明　通过直接计算，利用方程(1.1.1)，有

$$\frac{d}{\mathrm{d}t}E(t)=0。$$

上述等式关于 t 积分，可得(1.4.1)。

定理 1.4.1　假定引理 1.4.2 的条件成立. 如果对 $\forall s\in R$，$sf(s)\leqslant2(1+\lambda)F(s)$ ($\lambda>0$ 是常数)，则当下面的条件之一满足

时，问题(1.1.1)，(1.1.2)的解 $u(x, t)$ 在有限时间爆破：

(1) $E(0)<0$;

(2) $E(0)=0$, $(|\xi|^{-1}\hat{\varphi}, |\xi|^{-1}\hat{\psi})+(\hat{\varphi}, \hat{\psi})+\beta(|\xi|\hat{\varphi}, |\xi|\hat{\psi})>0$;

(3) $E(0)>0$, $(|\xi|^{-1}\hat{\varphi}, |\xi|^{-1}\hat{\psi})+(\hat{\varphi}, \hat{\psi})+\beta(|\xi|\hat{\varphi}, |\xi|\hat{\psi})>2\sqrt{E(0)(\|\varphi\|_{\dot{H}^{-1}}^2+\|\varphi\|^2+\beta\|\varphi\|_{\dot{H}^1}^2)}$

证明 令

$$H(t)=\||\xi|^{-1}\hat{u}\|^2+\|\hat{u}\|^2+\beta\||\xi|\hat{u}\|^2+\gamma_0(t+t_0)^2 \tag{1.4.2}$$

γ_0 和 t_0 是待定的非负常数. 则

$$\begin{aligned}\dot{H}(t)=&2(|\xi|^{-1}\hat{u}, |\xi|^{-1}\hat{u}_t)+2(\hat{u}, \hat{u}_t)\\&+2\beta(|\xi|\hat{u}, |\xi|\hat{u}_t)+2\gamma_0(t+t_0)\end{aligned}$$

利用 Schwartz 不等式，有

$$\dot{H}(t)^2\leqslant 4H(t)[\||\xi|^{-1}\hat{u}_t\|^2+\|\hat{u}_t\|^2+\beta\||\xi|\hat{u}_t\|^2+\gamma_0] \tag{1.4.3}$$

利用方程(1.1.1)和能量等式(1.4.1)，可得

$$\begin{aligned}\ddot{H}(t)=&2\||\xi|^{-1}\hat{u}_t\|^2+2\|\hat{u}_t\|^2+2\beta\||\xi|\hat{u}_t\|^2+2\gamma_0\\&+2(|\xi|^{-1}\hat{u}, |\xi|^{-1}\hat{u}_{tt})+2(\hat{u}, \hat{u}_{tt})+2\beta(|\xi|\hat{u}, |\xi|\hat{u}_{tt})\\=&2\||\xi|^{-1}\hat{u}_t\|^2+2\|\hat{u}_t\|^2+2\beta\||\xi|\hat{u}_t\|^2+2\gamma_0\\&+2(\hat{u}, -\hat{u}-\alpha|\xi|^2\hat{u}-\widehat{f(u)})\\=&2\||\xi|^{-1}\hat{u}_t\|^2+2\|\hat{u}_t\|^2\\&+2\beta\||\xi|\hat{u}_t\|^2+2\gamma_0-2\|\hat{u}\|^2-2\alpha\||\xi|\hat{u}\|^2\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&-2\int_{-\infty}^{+\infty} uf(u)\,\mathrm{d}x \\
=&-(2+4\lambda)(E(0)+\gamma_0) \\
&+4(1+\lambda)(\| |\xi|^{-1}\hat{u}_t\|^2+\|\hat{u}_t\|^2+\beta\| |\xi|\hat{u}_t\|^2 \\
&+\gamma_0)+4\lambda\|\hat{u}\|^2+4\lambda\alpha\| |\xi|\hat{u}\|^2 \\
&+2\int_{-\infty}^{+\infty}[(1+2\lambda)F(u)-uf(u)]\,\mathrm{d}x. \qquad (1.4.4)
\end{aligned}
$$

由(1.4.2)－(1.4.4)可得

$$
H(t)\ddot{H}(t)-(1+\lambda)\dot{H}(t)^2\geqslant -2(1+2\lambda)(E(0)+\gamma_0)H(t) \qquad (1.4.5)
$$

若 $E(0)<0$，取 $\gamma_0=-E(0)>0$，由(1.4.5)得

$$
H(t)\ddot{H}(t)-(1+\lambda)\dot{H}(t)^2\geqslant 0. \qquad (1.4.6)
$$

显然，如果 t_0 充分大，$\dot{H}(0)>0$. 由引理 1.4.1 知道，在最多等于 $\dfrac{H(0)}{\lambda\dot{H}(0)}<+\infty$ 的某时刻 T_1，$H(t)$ 成为无穷大。

如果 $E(0)=0$，取 $\gamma_0=0$，则(1.4.6)成立。注意到定理中的(2)，有 $\dot{H}(0)>0$。利用引理 1.4.1，在最多等于 $\dfrac{H(0)}{\lambda\dot{H}(0)}<+\infty$ 的有限时刻 T_2，$H(t)$ 成为无穷大。

如果 $E(0)>0$，取 $\gamma_0=0$，则 $H(t)$ 满足

$$
H(t)\ddot{H}(t)-(1+\lambda)\dot{H}(t)^2\geqslant -2(1+2\lambda)E(0)H(t)
$$

定义 $I(t)=H^{-\lambda}(t)$，则 $\dot{I}(t)=-\lambda H^{-\lambda-1}(t)\dot{H}(t)$

$$
\begin{aligned}
\ddot{I}(t)&=-\lambda H^{-\lambda-2}(t)[H(t)\ddot{H}(t)-(1+\lambda)\dot{H}(t)^2] \\
&\leqslant 2\lambda(1+2\lambda)E(0)H^{-\lambda-1}(t). \qquad (1.4.7)
\end{aligned}
$$

注意到定理中的(3)，有 $\dot{I}(0)<0$。$\bar{t}=\sup\{t\mid \dot{I}(\tau)<0,\ \tau\in[0,t)\}$，由 $\dot{I}(t)$ 的连续性可知，$\bar{t}>0$. (1.4.7)两端同乘以 $2\dot{I}(t)$，得

$$
\frac{d}{\mathrm{d}t}(\dot{I}(t)^2)\geqslant -4(1+2\lambda)\lambda^2E(0)H^{-2\lambda-2}(t)\dot{H}(t)
$$

$$=4\lambda^2E(0)\frac{d}{dt}H^{-2\lambda-1}(t),\ \forall t\in[0,\bar{t}). \quad (1.4.8)$$

(1.4.8)式两端在$[0, t)$上积分($t\in[0,\bar{t})$)，得

$$\dot{I}(t)^2\geqslant\dot{I}(0)^2+4\lambda^2E(0)[H^{-2\lambda-1}(t)-H^{-2\lambda-1}(0)] \quad (1.4.9)$$

由定理中的(3)，可知

$$\dot{I}(0)^2-4\lambda^2E(0)H^{-2\lambda-1}(0)>0 \quad (1.4.10)$$

注意到$\dot{I}(t)$的连续性，由(1.4.9)和(1.4.10)得，

对$t\in[0,\bar{t})$，$\dot{I}(t)\leqslant-\sqrt{\dot{I}(0)^2-4\lambda^2E(0)H^{-2\lambda-1}(0)}$；
根据$\bar{t}$的定义，这个不等式对所有$t\geqslant0$成立。因而

$$I(t)\leqslant I(0)-t\sqrt{\dot{I}(0)^2-4\lambda^2E(0)H^{-2\lambda-1}(0)},\ \forall t>0$$

所以，对某个$T_1(0<T_1\leqslant T_0)$，有$I(T_1)=0$，其中

$$T_0=I(0)[\dot{I}(0)^2-4\lambda^2E(0)H^{-2\lambda-1}(0)]^{-\frac{1}{2}}.$$

因而，$H(t)$在时刻T_1为无穷大。

注 1.4.1 (1)假定$f(s)=as^p$，$p>1$是偶数，$a\neq0$. 取$\varphi(x)=qxe^{-x^2}$，$\psi(x)=qxe^{-x^2}$，其中$aq>0$，则对适当大的$|q|>0$，定理1.4.1的条件满足。

(2) 假定$f(s)=as^p$，$p>1$是奇数，$a<0$。则对适当大的$|q|>0(q<0)$，$\varphi(x)=qxe^{-x^2}$和$\psi(x)=qxe^{-x^2}$满足定理1.4.1的条件。

参考文献

[1] Boussinesq M. J. , Essai sur la thMYM\acute{e}MYMorie des eaux courants[J]. Mem. Acad. Sci. Inst. Nat. France, 1877, 23(1): 1-680.

[2] Kano T. and Nishida T. , A mathematical justification for Korteweg-de-Vries equation and Boussinesq equation of water sur-

face waves[J]. Osaka J. Math. ,1986, 23: 389 –413.

[3] Clarkson A. , Leveque R. J. and Saxton R. , Solitary – wave interactions in elastic rods[J]. Stud. Appl. Math. , 1986, 75: 95 –122.

[4] Samsonov A. M. and Sokurinskaya E. V. , Energy exchange between nonlinear waves in elastic waveguide and external media [M]. Nonlinear Waves in Active Media, Berlin: Springer, 1989, 99 –104.

[5] Samsonov A. M. , Nonlinear strain waves in elastic waveguide [M]. Jeffrey A. , J. Engel – brecht(Eds), Nonlinear Waves in Solids, in: CISM Courses and Lecture, Wien: Springer, 1994.

[6] Porubov A. V. , Strain solitary waves in an elastic rod with microstructure[J]. Rend. Sem. Mat. Univ. Politec Torino, 2000, 58: 189 –198.

[7] Schneider G. and Eugene C. W. , Kawahara dynamics in dispersive media[J]. Physica. D, 2001, 152 –153: 384 –394.

[8] Bona J. L. and Sachs R. L. , Global existence of smooth solutions and stability of solitary waves for a generalized Boussinesq equation[J]. Comm. Math. Phys. , 1988, 118: 15 –29.

[9] Tsutsumi M. and Matahashi T. , On the Cauchy problem for the Boussinesq type equation [J]. Math. Japan, 1991, 2: 371 –379.

[10] Lineras F. , Global existence of small solutions for a generalized Boussinesq equation[J]. J. Differential Equations, 1993, 106: 257 –293.

[11] Sachs R. L. , On the blow up of certain solution of the "good" Boussinesq equation[J]. Appl. Anal. , 1990, 34: 145 –152.

[12] Warnecke G. S. , MYM \ ddot { U } MYMber das homogeneDirichlet – problem bei nichtlinearen paritiellen differential-

gleichungen vom typ der Boussinesq – Gleichung [J]. Math. Meth. Appl. Sci., 1987, 9: 493 – 519.

[13] Chen Guowang, Wang Yanping and Wang Shubin, Initial boundary value problem of the generalized cubic double dispersion equation [J]. J. Math. Anal. Appl., 2004, 299: 563 – 577.

[14] Taylor M. E., Partial Differential Equations III [M]. Nonlinear Equations, New York: Springer – Verlag, 1996.

[15] Sogge C. D., Lectures on Nonlinear Wave Equations [M]. Boston: International Press Incorporated, 1995.

[16] Hrusa W. J., Global existence and asymptotic for a semilinear hyperbolic Volterra equation with large initial data [J]. SIAM J. Math. Anal., 1985, 16(1): 110 – 134.

[17] Levine H. A., Instability and nonexistence of global solution to nonlinear wave equations of the form $Pu_{tt} = -A(u) + F(u)$ [J]. Trans. American Math. Soc., 1974, 192: 1 – 21.

第二章　一类具有粘性项的拟线性波方程的初边值问题

第一节　引言

在本章中，考虑如下的非线性发展方程的初边值问题。

$$u_{tt} - \operatorname{div}\{\sigma(|\nabla u|^2)\nabla u\} - \Delta u - \Delta u_t + \delta |u_t|^{p-1} u_t$$
$$= \mu |u|^{q-1} u, x \in \Omega,\ t > 0, \tag{2.1.1}$$
$$u(x,\ t) = 0,\ x \in \partial\Omega,\ t \geqslant 0, \tag{2.1.2}$$
$$u(x,\ t) = u_0(x),\ u_t(x,\ 0) = u_1(x),\ x \in \Omega \tag{2.1.3}$$

将证明问题在小初值条件下的整体广义解的存在性、唯一性以及解的爆破性质。其中 $\Omega \subset R^N$（$N \geqslant 1$ 是自然数，当 $N = 1$ 时，Ω 是一个有界区间）是具有充分光滑边界 $\partial\Omega$ 的有界区域，$u(t,\ x)$ 是关于变量 $x = (x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_N) \in \Omega$ 以及 $t \in R_+ = [0,\ +\infty)$ 的未知函数，$\sigma(s)$ 是已知的非线性函数，$\nabla = (\frac{\partial}{\partial x_1},\ \frac{\partial}{\partial x_2},\ \cdots,\ \frac{\partial}{\partial x_N})$ 表示 R^N 中的梯度算子，"Δ" 表示 R^N 中的 Laplace 算子，$q > 1$，$p \geqslant 1$，$\delta > 0$，$\mu > 0$ 都是常数，$u_0(x)$ 和 $u_1(x)$ 是 $\overline{\Omega}$ 上的已知函数，下标 x（$N = 1$）和 t 表示求偏导数。

方程(2.1.1)是在描述弹性杆的非线性振动时提出的[1]，此时的 $\sigma \equiv 0$，$\delta = \mu = 0$。Greenberg 在 1969 年提出并研究了这种情形的大初值时整体光滑解的存在性。此后，许多作者用各种不同的方法从不同的方面对此情形的相关问题进行了研究[2-7]。当 $\sigma(s) \equiv 0$，$\mu = 0$，$\delta = 1$ 时，Nakao[8] 考虑了方程(2.1.1)的解的存在性及衰减性质。文献[9-13]讨论了形如 $u_{tt} - \Delta u = \mu |u|^{q-1} u$

的方程，指出如果初始能量为负时，则源项$\mu|u|^{q-1}u$的存在引起整体解的不存在以及某些情形下解在有限时刻爆破。

文献[14，15]的作者则研究了形如$u_{tt}-\Delta u+\delta|u_t|^{p-1}u_t=0$的方程，指出当$p>1$时，非线性阻尼项$\delta|u_t|^{p-1}u_t$保证了对任意的初值整体解的存在性。

文献[16]研究了形如$u_{tt}-\Delta u+\delta|u_t|^{p-1}u_t=\mu|u|^{q-1}u$的方程在$p>1$时的情形，探讨了阻尼项和源项的相互作用，指出在$p<q$，$q\leqslant\frac{n}{n-2}$(这一条件只在$n\geqslant 3$时需要)时，如果初始能量充分负，则 Cauchy 问题的解在有限时刻爆破。

Levine 在文献[17]中推广了文献[16]中的结果，证明了如果$p<q$，$q\leqslant\frac{n+3}{n-3}$(这一条件只在$n>3$时需要)，则问题没有整体解。

Messaoudi[18]也改进了 Georgiev 和 Todorova[16]的结果，把文献[16]中解的爆破的初始能量“充分负”的条件削弱为“负”。

此外，文献[19,20]的作者也研究了文献[16]中的方程，讨论了阻尼项和源项的相互作用，指出了$p=q$是临界情况. 当$q\leqslant p$时，对任意具有紧支集的初值，弱解整体存在；当$q>p$时，如果初始能量是负的，则解在有限时刻发生爆破。

文献[10]和文献[21]研究了形如

$$(|u_t|^{\ell-2}u_t)_t-a\operatorname{div}(|\nabla u|^{q-1}\nabla u)+b|u_t|^{m-2}u_t=c|u|^{p-2}u$$

的方程的初边值问题，证明了问题整体解的不存在性，其中 div$(|\nabla u|^{q-2}\nabla u)$表示工程应变张量(也称第一 Piola – Kirchhoff 应变张量)。

Park 和 Bae[22]则研究了问题(2.1.1) – (2.1.3)。可以看出，方程(2.1.1)是前述文献中所讨论的方程在某种意义下的广义形

式。文献[22]的作者想证明此问题在小初值情形下整体弱解的存在性。然而遗憾的是，由于文献[22]中的(3.10)，(3.11)和(3.35)式的推导过程出现错误，导致所得结果失真。此外，该文在引言中介绍到要证明问题解的存在性及唯一性，实际上，文中并没有讨论解的唯一性问题。

本文重新对问题(2.1.1) - (2.1.3)进行研究，将改正文献[22]中有关的错误推导，并且将避开文献[22]中使用迹定理时的复杂运算，证明问题(2.1.1) - (2.1.3)在$\delta > 0$，$\mu > 0$时整体广义解的存在性，同时完成解的唯一性的证明。此外，本文在建立一微分不等式的基础上，给出问题(2.1.1) - (2.1.3)解发生爆破的充分条件，这是文献[22]不曾研究的。

本章使用如下记号：$L^p(\Omega)(1 \leqslant p \leqslant +\infty)$表示由通常定义在$\Omega$上所有$L^p$ - 函数构成的空间，其范数为$\|\cdot\|_p = \|\cdot\|_{L^p(\Omega)}$，$\|\cdot\| = \|\cdot\|_2$；$H^m(\Omega)$表示通常的Sobolev空间，其范数记为$\|\cdot\|_m$，其中$m$是非负整数，$C^m(\bar{\Omega})$表示由通常的定义在$\bar{\Omega}$上所有的$m$次连续可微的函数构成的空间，$Q_T = (0, T) \times \Omega$。

这里引入后面需要的几个引理。

引理2.1.1　(Sobolev - Poincarl[23])如果$1 \leqslant q < +\infty$ $(N = 1, 2)$或者$1 \leqslant q \leqslant \dfrac{N+2}{N-2}(N \geqslant 3)$，则存在常数$C(\Omega, q+1)$使得对$\forall u \in H_0^1(\Omega)$，有

$$\|u\|_{q+1} \leqslant C(\Omega, q+1)\|\nabla u\|$$

引理2.1.2　([24])假定$Q \subset R_x^N \times R_t$是一有界区域，$g_\mu$和$g$是$L^q(Q)(1 < q < +\infty)$中的函数，$\|g_\mu\|_{L^q(Q)} \leqslant C$，$g_\mu$在$Q$中几乎处处收敛于$g$，则$g_\mu$在$L^q(Q)$中弱收敛于$g$。

引理2.1.3　([24])设X是Banach空间。如果

$$f \in L^p(0, T; X), \frac{\partial f}{\partial t} \in L^p(0, T; X)(1 \leqslant p \leqslant +\infty)$$

则必要时可以在一个零测集上重新定义的f从$[0, T]$到X连续。

引理 2.1.4 [25]假定 $\dot{u}=F(t,u)$, $\dot{v}\geqslant F(t,v)$, $F\in C([0,+\infty)\times(-\infty,+\infty))$, $u(t_0)=v(t_0)$, $t_0\geqslant 0$, 则当 $t\geqslant t_0$ 时, $v(t)\geqslant u(t)$。

为了讨论问题(2.1.1)-(2.1.3), 定义位势 $J(u(t,\cdot))$, 能量 $E(u(t,\cdot))$ 以及 I-正集如下:

$$J(u(t,\cdot))=\frac{1}{2}\|\nabla u(t,\cdot)\|^2-\frac{\mu}{q+1}\|u(t,\cdot)\|_{q+1}^{q+1},\ u\in H_0^1(\Omega)$$

$$I(u(t,\cdot))=\|\nabla u(t,\cdot)\|^2-\mu\|u(t,\cdot)\|_{q+1}^{q+1},\ u\in H_0^1(\Omega)$$

$$W=\{u\in H_0^1(\Omega)\mid I(u(t,\cdot))>0\}\cup\{0\}$$

本章安排如下:在第二节中给出问题(2.1.1)-(2.1.3)近似解的积分估计;第三节证明问题(2.1.1)-(2.1.3)整体广义解的存在性与唯一性;第四节证明问题(2.1.1)-(2.1.3)解发生爆破的充分条件。

第二节 近似解的积分估计

设 $\{w_j(x)\}$ 是 $L^2(\Omega)$ 的一标准正交基, 由相应于特征值 $\lambda_j(j=1,2,\cdots)$ 的特征问题

$$\Delta w+\lambda w=0,\ w\Big|_{\partial\Omega}=0$$

的特征函数构成。设

$$u_m(t,x)=\sum_{j=1}^{m}g_{mj}(t)w_j(x)$$

是问题(2.1.1)-(2.1.3)的 Galerkin 近似解, 其中 $g_{mj}(t)(j=1,2\cdots,m)$ 是待定函数, m 是自然数, 假定初边值函数 $u_0(x)$ 和 $u_1(x)$ 可展开为

$$u_0(x)=\sum_{j=1}^{\infty}a_jw_j(x),\ u_1(x)=\sum_{j=1}^{\infty}b_jw_j(x)$$

其中 a_j, $b_j(j=1,2,\cdots)$ 是常数.

假定 $m \to +\infty$ 时，$u_{0m}(x) = \sum_{j=1}^{m} a_j w_j(x)$ 在 $H_0^1(\Omega)$ 中收敛于 $u_0(x)$，$u_{1m}(x) = \sum_{j=1}^{m} b_j w_j(x)$ 在 $H_0^1(\Omega) \cap L^{p+1}(\Omega)$ 中收敛于 $u_1(x)$. 把近似解 $u_m(t, x)$ 代入(2.1.1)，两端同乘以 $w_j(x)$，并在 Ω 上积分，得

$$(u_{mtt} - \mathrm{div}\{\sigma(|\nabla u_m|^2)\nabla u_m\} - \Delta u_m - \Delta u_{mt} + \delta |u_{mt}|^{p-1} u_{mt}, w_j)$$
$$= \mu(|u_m|^{q-1} u_m, w_j), \quad j = 1, 2, \cdots, m \tag{2.2.1}$$

其中 $(\cdot, \cdot)$ 表示 $L^2(\Omega)$ 中的内积，把近似解 $u_m(t, x)$ 及初值函数的近似

$$u_{0m}(x) = \sum_{j=1}^{m} a_j w_j(x), \; u_{1m}(x) = \sum_{j=1}^{m} b_j w_j(x)$$

代入(2.1.3)，得到

$$g_{mj}(0) = a_j, \; g_{mjt}(0) = b_j, \; j = 1, 2, \cdots, m \tag{2.2.2}$$

引理 2.2.1　假定下列条件成立：

1. $1 < q < +\infty \; (N = 1, 2)$ 或者 $1 < q \leqslant \frac{N+2}{N-2} \; (N \geqslant 3)$；$\mu > 0$，$\delta > 0$ 和 $p \geqslant 1$ 是常数；
2. $0 \leqslant \sigma(s) \leqslant K_1$ 并且 $\sigma(s) \in C[0, +\infty)$；
3. $u_0 \in W$，$u_1 \in H_0^1(\Omega) \cap L^{p+1}(\Omega)$，$\int_\Omega \int_0^{|\nabla u(t,x)|^2} \sigma(s) \mathrm{d}s\mathrm{d}x < K_4$，$K_4 > 0$ 是常数；
4. $\mu[C(\Omega, q+1)]^{q+1}\left[\frac{2(q+1)}{q-1}E(u_0(\cdot))\right]^{\frac{q-1}{2}} < 1 \quad (2.2.3)$

则 Cauchy 问题(2.2.1)，(2.2.2)存在古典解

$$g_{mj}(t) \in C^2[0, T] \; (j = 1, 2, \cdots, m)$$
$$u_m(t, x) \in W \; (t \in [0, T])$$

并且满足估计

$$\| u_{mt}(t, \cdot) \|^2 + \int_\Omega \int_0^{|\nabla u_m(t,x)|^2} \sigma(s) \mathrm{d}s\mathrm{d}x + \frac{q-1}{q+1} \| \nabla u_m(t, \cdot) \|^2$$

$$+ 2\delta \int_0^t \| u_{m\tau}(\tau, 0) \|_{p+1}^{p+1} \mathrm{d}\tau + 2\int_0^t \| \nabla u_{m\tau}(\tau, 0) \|^2 \mathrm{d}\tau$$

$$\leqslant 2E(u_{0m}(\cdot)) < K_5,\ t \in [0, T] \tag{2.2.4}$$

其中 $K_5 > 0$ 是常数。

证明　利用 Picard 迭代方法，可以解问题(2.2.1)，(2.2.2)。因而问题(2.2.1)，(2.2.2)有局部解 $g_{mj}(t) \in C^2[0, T_m)(j = 1, 2, \cdots, m)$，$0 < T_m \leqslant T$。

由于 $I(u_{0m}) > 0$，利用 $u_m(t, x)$ 关于 t 的连续性，知道在 $t = 0$ 附近的某个邻域内有

$$I(u_m(t, \cdot)) \geqslant 0 \tag{2.2.5}$$

设 $t_{\max}$ 是(2.2.5)成立于 $[0, t_{\max})$ 上的最大时间(可能 $t_{\max} = T_m$)。因此

$$J(u_m(t, \cdot)) = \frac{1}{q+1} I(u_m(t, \cdot)) + \frac{q-1}{2(q+1)} \| \nabla u_m(t, \cdot) \|^2$$

$$\geqslant \frac{q-1}{2(q+1)} \| \nabla u_m(t, \cdot) \|^2,\ t \in [0, t_{\max})$$

(2.2.1)两端同乘以 $g_{mj}(t)$，并对 $j = 1, 2, \cdots, m$ 求和，得到

$$\frac{d}{\mathrm{d}t} E(u_m(t, \cdot)) + \| \nabla u_{mt}(t, \cdot) \|^2 + \delta \| u_{mt}(t, \cdot) \|_{p+1}^{p+1} = 0,$$

这表明

$$E(u_m(t, \cdot)) + \int_0^t \| \nabla u_{m\tau}(\tau, \cdot) \|^2 \mathrm{d}\tau$$

$$+ \delta \int_0^t \| u_{m\tau}(\tau, \cdot) \|_{p+1}^{p+1} \mathrm{d}\tau = E(u_{0m}(\cdot)) \tag{2.2.6}$$

注意到

$$J(u_m(t, \cdot)) \leqslant E(u_{0m}(\cdot)),\ \| \nabla u_m(t, \cdot) \|^2$$

$$\leqslant \frac{2(q+1)}{q-1} J(u_m(t, \cdot)) \tag{2.2.7}$$

利用 Sobolev – Poincaré 不等式，(2.2.3)和(2.2.7)式，得到

$$\mu \| u_m(t, \cdot) \|_{q+1}^{q+1}$$

$$\leqslant \mu [C(\Omega; q+1)]^{q+1} \| \nabla u_m(t, \cdot) \|^{q+1}$$

$$\leqslant \mu[C(\Omega;q+1)]^{q+1}[\frac{2(q+1)}{q-1}J(u_m(t,\cdot))]^{\frac{q-1}{2}}\|\nabla u_m(t,\cdot)\|^2$$

$$\leqslant \mu[C(\Omega;q+1)]^{q+1}[\frac{2(q+1)}{q-1}E(u_{0m}(\cdot)]^{\frac{q-1}{2}}\|\nabla u_m(t,\cdot)\|^2$$

$$<\|\nabla u_m(t,\ )\|^2,\ t\in[0,t_{\max}),$$

即

$$I(u_m(t,\cdot))>0,\ t\in[0,t_{\max}) \tag{2.2.8}$$

由(2.2.6)和(2.2.8)式知(2.2.4)式成立. 由 $\|u_{mt}(t,\cdot)\|$, $\|\nabla u_m(t,\cdot)\|$ 的有界性以及解的延拓定理知 $t_{\max}=T$. 引理得证。

引理 2.2.2　假定引理2.2.1的条件以及下述条件成立:

1. $\sigma(s)\in C^1[0,+\infty)$ 且 $\left|\sigma'(s)\right|s<K_2$ 对 $\forall s\in[0,+\infty)$ 成立, 其中 $\sigma'(s)=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\sigma(s)$;

2. 当 $N=1,2$ 时, $1\leqslant p<+\infty$; 当 $N>3$ 时, $1\leqslant p\leqslant\dfrac{N+2}{N}$.

则问题(2.1.1) - (2.1.3)的 Galerkin 近似解满足估计式

$$\|\Delta u_m(t,\cdot)\|^2\leqslant C_0(T),\ t\in[0,T] \tag{2.2.9}$$

这里及后面的 $C_i(T)(i=0,1,2,\cdots)$ 是与 m 无关的常数。

证明　(2.2.1)两端同乘以 $-2\lambda_j g_{mj}(t)$ 并对 $j=1,2,\cdots,m$ 求和, 得到

$$\begin{aligned}&\frac{d}{\mathrm{d}t}\|\nabla^2 u_m(t,\cdot)\|^2+2\|\Delta u_m(t,\cdot)\|^2\\&=2\frac{d}{\mathrm{d}t}(u_{mt}(t,\cdot),\Delta u_m(t,\cdot))+2\|\nabla u_{mt}(t,\cdot)\|^2\\&\quad-2(\mathrm{div}(\sigma(\left|\nabla u_m(t,\cdot)\right|^2)\nabla u_m(t,\cdot)),\Delta u_m(t,\cdot))\\&\quad+2\delta(\left|u_{mt}(t,\cdot)\right|^{p-1}u_{mt}(t,\cdot),\Delta u_m(t,\cdot))\\&\quad-2\mu(\left|u_m(t,\cdot)\right|^{q-1}u_m(t,\cdot),\Delta u_m(t,\cdot))\end{aligned} \tag{2.2.10}$$

(2.2.10)式两端在 $[0, t]$ 上积分，得

$$
\begin{aligned}
&\|\Delta u_m(t,\cdot)\|^2+2\int_0^t\|\Delta u_m(\tau,\cdot)\|^2\mathrm{d}\tau \\
&=\|\Delta u_m(0,\cdot)\|^2+2(u_{mt}(t,\cdot),\Delta u_m(t,\cdot)) \\
&\quad-2(u_{mt}(0,\cdot),\Delta u_m(0,\cdot))+2\int_0^t\|\nabla u_{m\tau}(\tau,\cdot)\|^2\mathrm{d}\tau \\
&\quad-2\int_0^t\int_\Omega \operatorname{div}\{\sigma(|\nabla u_m(\tau,x)|^2)\nabla u_m(\tau,x)\}\Delta u_m(\tau,x)\mathrm{d}x\mathrm{d}\tau \\
&\quad+2\delta\int_0^t\int_\Omega |u_{m\tau}(\tau,x)|^{p-1}u_{m\tau}(\tau,x)\Delta u_m(\tau,x)\mathrm{d}x\mathrm{d}\tau \\
&\quad-2\mu\int_0^t\int_\Omega |u_m(\tau,x)|^{q-1}u_m(\tau,x)\Delta u_m(\tau,x)\mathrm{d}x\mathrm{d}\tau
\end{aligned}
\tag{2.2.11}
$$

下面对(2.2.11)式的右端项作估计。

取 $\lambda=\dfrac{N(p-1)}{2p}$（当 $N=1,2$ 时，$1\leqslant p<+\infty$；当 $N\geqslant 3$ 时，$1\leqslant p\leqslant\dfrac{N+2}{N}$），利用 Gagliardo－Nirenberg 不等式，注意到(2.2.4)式，得到

$$
\begin{aligned}
\|u_{mt}(t,\cdot)\|_{2p}^{p}&\leqslant C_1\|u_{mt}(t,\cdot)\|^{p(1-\lambda)}\|\nabla u_{mt}(t,\cdot)\|^{p\lambda} \\
&\leqslant C_2\|\nabla u_{mt}(t,\cdot)\|^{\frac{N(p-1)}{2}}.
\end{aligned}
\tag{2.2.12}
$$

由(2.2.4)和(2.2.12)式，利用 Hölder 不等式，得

$$
\begin{aligned}
&\left|2\delta\int_0^t\int_\Omega |u_{m\tau}(\tau,x)|^{p-1}u_{m\tau}(\tau,x)\Delta u_m(\tau,x)\mathrm{d}x\mathrm{d}\tau\right| \\
&\leqslant 2\delta\int_0^t\|u_{m\tau}(\tau,\cdot)\|_{2p}^{p}\|\Delta u_m(\tau,\cdot)\|\mathrm{d}\tau \\
&\leqslant C_3\int_0^t\|\nabla u_{m\tau}(\tau,\cdot)\|^{\frac{N(p-1)}{2}}\|\Delta u_m(\tau,\cdot)\|\mathrm{d}\tau \\
&\leqslant \frac{C_3}{2}\int_0^t(\|\Delta u_m(\tau,\cdot)\|^2+\|\nabla u_{m\tau}(\tau,\cdot)\|^{N(p-1)})\mathrm{d}\tau \\
&\leqslant C_4\int_0^t(\|\Delta u_m(\tau,\cdot)\|^2+\|\nabla u_{m\tau}(\tau,\cdot)\|^2+1)\mathrm{d}\tau
\end{aligned}
$$

$$\leqslant C_4\int_0^t \|\Delta u_m(\tau,0)\|^2 + C_5(T) \tag{2.2.13}$$

如果 $p=1$，有

$$\left|2\delta\int_0^t\int_\Omega |u_{m\tau}(\tau,x)|^{p-1}u_{m\tau}(\tau,x)\Delta u_m(\tau,x)\mathrm{d}x\mathrm{d}\tau\right|$$

$$\leqslant C_6\int_0^t \|\Delta u_m(\tau,\cdot)\|^2\mathrm{d}\tau + C_7(T) \tag{2.2.14}$$

因而，当 $N=1,2$ 时，$1\leqslant p<+\infty$ 或 $N\geqslant 3$ 时，$1\leqslant p\leqslant\dfrac{N+2}{N}$，总有

$$\left|2\delta\int_0^t\int_\Omega |u_{m\tau}(\tau,x)|^{p-1}u_{m\tau}(\tau,x)\Delta u_m(\tau,x)\mathrm{d}x\mathrm{d}\tau\right|$$

$$\leqslant C_8\int_0^t \|\Delta u_m(\tau,\cdot)\|^2\mathrm{d}\tau + C_9(T) \tag{2.2.15}$$

利用分部积分及 Hölder 不等式有

$$\begin{aligned}&\left|2\mu\int_0^t\int_\Omega |u_m(\tau,x)|^{q-1}u_m(\tau,x)\Delta u_m(\tau,x)\mathrm{d}x\mathrm{d}\tau\right|\\ &= 2q\mu\int_0^t\int_\Omega |u_m(\tau,x)|^{q-1}|\nabla u_m(\tau,x)|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}\tau\\ &\leqslant 2q\mu\int_0^t \|u_m(\tau,\cdot)\|_{q+1}^{q-1}\|\nabla u_m(\tau,\cdot)\|_{q+1}^2\mathrm{d}\tau\end{aligned} \tag{2.2.16}$$

利用 Sobolev－Poincaré 不等式及(2.2.4)式，有

$$\|u_m(\tau,\cdot)\|_{q+1}^{q-1}\leqslant[C(\Omega,q+1)]^{q-1}\|\nabla u_m(\tau,\cdot)\|^{q-1}\leqslant C_{10} \tag{2.2.17}$$

利用 Gagliardo-Nirenberg 不等式(取 $\lambda_1=\dfrac{N(q-1)}{2(q+1)}$) 和 Young 不等式，得

$$\begin{aligned}\|\nabla u_m(\tau,\cdot)\|_{q+1}^2 &\leqslant C_{11}\|\nabla u_m(\tau,\cdot)\|^{2(1-\lambda_1)}\|\Delta u_m(\tau,\cdot)\|^{2\lambda_1}\\ &\leqslant C_{12}(1+\|\Delta u_m(\tau,\cdot)\|^2)\end{aligned} \tag{2.2.18}$$

把(2.2.17)和(2.2.18)式代入(2.2.16)式，得到

$$\left|2\mu\int_0^t\left|u_m(\tau,x)\right|^{q-1}u_m(\tau,x)\Delta u_m(\tau,x)\mathrm{d}x\mathrm{d}\tau\right|$$
$$\leqslant C_{13}\int_0^t\|\Delta u_m(\tau,\cdot)\|^2\mathrm{d}\tau+C_{14}(T) \tag{2.2.19}$$

现在估计(2.2.11)中的项

$$-2\int_0^t\int_\Omega\operatorname{div}\{\sigma(\left|\nabla u_m(\tau,x)\right|^2)\nabla u_m(\tau,x)\}\Delta u_m(\tau,x)\mathrm{d}x\mathrm{d}\tau \tag{2.2.20}$$

注意到

$$\begin{aligned}&\left|\operatorname{div}\{\sigma(\left|\nabla u_m(\tau,x)\right|^2)\nabla u_m(\tau,x)\}\right|\\&=\Big|\sigma(\left|\nabla u_m(\tau,x)\right|^2)\Delta u_m(\tau,x)\\&\quad+2\sigma'(\left|\nabla u_m(\tau,x)\right|^2)\sum_{i=1}^N\{\frac{\partial u_m(\tau,x)}{\partial x_i}\\&\quad[\sum_{j=1}^N\frac{\partial u_m(\tau,x)}{\partial x_j}\frac{\partial^2u_m(\tau,x)}{\partial x_i\partial x_j}]\}\Big|\\&\leqslant\sigma(\left|\nabla u_m(\tau,x)\right|^2)\left|\Delta u_m(\tau,x)\right|\\&\quad+2\left|\sigma'(\left|\nabla u_m(\tau,x)\right|^2)\right|\left|\nabla u_m(\tau,x)\right|^2\cdot\\&\quad(\sum_{i,j=1}^N\left|\frac{\partial^2u_m(\tau,x)}{\partial x_i\partial x_j}\right|^2)^{\frac12}.\end{aligned} \tag{2.2.21}$$

由于 $\|u_m\|_{H^2(\Omega)}$ 与 $\|\Delta u_m\|$ 等价，把(2.2.21)代入(2.2.20)，得到

$$\begin{aligned}&\left|2\int_0^t\int_\Omega\operatorname{div}\{\sigma(\left|\nabla u_m(\tau,x)\right|^2)\nabla u_m(\tau,x)\}\Delta u_m(\tau,x)\mathrm{d}x\mathrm{d}\tau\right|\\&\leqslant 2K_1\int_0^t\|\Delta u_m(\tau,\cdot)\|^2\mathrm{d}\tau\\&\quad+4K_2\int_0^t[\int_\Omega\sum_{i,j=1}^N\left|\frac{\partial^2u_m(\tau,x)}{\partial x_i\partial x_j}\right|^2\mathrm{d}x]^{\frac12}\|\Delta u_m(\tau,\cdot)\|\mathrm{d}\tau\\&\leqslant 2K_1\int_0^t\|\Delta u_m(\tau,\cdot)\|^2\mathrm{d}\tau\end{aligned}$$

$$+4K_2\int_0^t \| u_m(\tau,\cdot)\|_{H^2(\Omega)} \|\Delta u_m(\tau,\cdot)\| \mathrm{d}\tau$$

$$\leqslant C_{15}\int_0^t \|\Delta u_m(\tau,\cdot)\|^2 \mathrm{d}\tau \tag{2.2.22}$$

把(2.2.15)，(2.2.19)，(2.2.22)式代入(2.2.11)式，并利用 Hölder 不等式和 Gronwall 不等式，得到(2.2.9)式. 引理证毕。

引理 2.2.3 假定引理 2.2.2 的条件成立，并且当 $N>4$ 时

$$1+\frac{1}{N}\leqslant q\leqslant \min\left\{\frac{N+2}{N-2},\frac{N-2}{N-4}\right\}$$

成立，则如下估计式成立

$$\|\nabla u_{mt}(t,\cdot)\|^2+\int_0^t(\|u_{m\tau^2}(\tau,\cdot)\|^2+\|\nabla^2 u_{m\tau}(\tau,\cdot)\|^2)\mathrm{d}\tau \leqslant C_{16}(T),\ t\in[0,T] \tag{2.2.23}$$

证明 (2.2.1)两端同乘以 $-2\lambda_j g_{mjt}(t)$，并对 $j=1,2,\cdots,m$ 求和，得

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}(\|\nabla u_{mt}(t,\cdot)\|^2+\|\Delta u_m(t,\cdot)\|^2)+2\|\Delta u_{mt}(t,\cdot)\|^2\\ &=2\delta\int_\Omega |u_{mt}(t,x)|^{p-1}u_{mt}(t,x)\Delta u_{mt}(t,x)\mathrm{d}x\\ &\quad-2\mu\int_\Omega |u_m(t,x)|^{q-1}u_m(t,x)\Delta u_{mt}(t,x)\mathrm{d}x\\ &\quad-2\int_\Omega \mathrm{div}\{\sigma(|\nabla u_m(t,x)|^2)\nabla u_m(t,x)\}\Delta u_{mt}(t,x)\mathrm{d}x.\end{aligned} \tag{2.2.24}$$

接下来估计(2.2.24)式右端的有关项。

利用分部积分可以得到

$$\begin{aligned}&-2\delta\int_\Omega |u_{mt}(t,x)|^{p-1}u_{mt}(t,x)\Delta u_{mt}(t,x)\mathrm{d}x\\ &=2\delta p\int_\Omega |u_{mt}(t,x)|^{p-1}|\nabla u_{mt}(t,x)|^2\mathrm{d}x\geqslant 0.\end{aligned} \tag{2.2.25}$$

当 $1\leqslant N\leqslant 3$ 时，有

$$\| u_m(t,\cdot) \|_\infty \leqslant C_{17} \| u_m(t,\cdot) \|_{H^2(\Omega)} \leqslant C_{17}(T) \tag{2.2.26}$$

利用 Hölder 不等式，Young 不等式以及(2.2.26)式，并注意到 $N=1$ 或 2 时，$1<q<+\infty$；以及 $N=3$ 时 $1<q\leqslant 5$，得到

$$\begin{aligned}
&\left| 2\mu \int_\Omega \left| u_m(t,x) \right|^{q-1} u_m(t,x) \Delta u_{mt}(t,x)\,\mathrm{d}x \right| \\
&= \left| -2\mu q \int_\Omega \left| u_m(t,x) \right|^{q-1} \nabla u_m(t,x) \nabla u_{mt}(t,x)\,\mathrm{d}x \right| \\
&\leqslant 2\mu q \| u_m(t,\cdot) \|_\infty^{q-1} \| \nabla u_m(t,\cdot) \| \| \nabla u_{mt}(t,\cdot) \| \\
&\leqslant C_{18}(T)(1+\| \nabla u_{mt}(t,\cdot) \|^2)
\end{aligned} \tag{2.2.27}$$

当 $N>4$ 时，注意到引理中关于 q 的假定，并利用Gagliardo－Nirenberg 不等式，得到

$$\| \nabla u_m(t,\cdot) \|_{\frac{2N}{N-2}} \leqslant C_{19} \| \Delta u_m(t,\cdot) \| \leqslant C_{20}(T) \tag{2.2.28}$$

$$\| u_m(t,\cdot) \|_{N(q-1)} \leqslant C_{21} \| \Delta u_m(t,\cdot) \| \leqslant C_{22}(T) \tag{2.2.29}$$

注意到(2.2.28)和(2.2.29)，得到

$$\begin{aligned}
&\left| 2\mu \int_\Omega \left| u_m(t,x) \right|^{q-1} u_m(t,x) \Delta u_{mt}(t,x)\,\mathrm{d}x \right| \\
&\leqslant 2\mu q \| u_m(t,\cdot) \|_{N(q-1)}^{q-1} \| \nabla u_m(t,\cdot) \|_{\frac{2N}{N-2}} \| \nabla u_{mt}(t,\cdot) \| \\
&\leqslant C_{23}(T)(1+\| \nabla u_{mt}(t,\cdot) \|^2).
\end{aligned} \tag{2.2.30}$$

因而，当 $N\geqslant 1$ 时，在引理的条件下，总有

$$\begin{aligned}
&\left| 2\mu \int_\Omega \left| u_m(t,x) \right|^{q-1} u_m(t,x) \Delta u_{mt}(t,x)\,\mathrm{d}x \right| \\
&\leqslant C_{24}(T)(1+\| \nabla u_{mt}(t,\cdot) \|^2)
\end{aligned} \tag{2.2.31}$$

注意到

$$\begin{aligned}
&\left| 2\int_\Omega \operatorname{div}\{ \sigma(\left| \nabla u_m(t,x) \right|^2) \nabla u_m(t,x) \} \Delta u_{mt}(t,x)\,\mathrm{d}x \right| \\
&\leqslant 2\int_\Omega \sigma(\left| \nabla u_m(t,x) \right|^2) \left| \Delta u_m(t,x) \right| \left| \Delta u_{mt}(t,x) \right| \mathrm{d}x
\end{aligned}$$

$$+4\int_\Omega \left|\sigma'(\left|\nabla u_m(t,x)\right|^2)\right| \left|\nabla u_m(t,x)\right|^2$$

$$\left\{\sum_{i,j=1}^{N}\left[\frac{\partial^2 u_m(t,x)}{\partial x_i \partial x_j}\right]^2\right\}^{\frac{1}{2}} \cdot \left|\Delta u_{mt}(t,x)\right| \mathrm{d}x$$

$$\leqslant 2K_1 \|\Delta u_m(t,\cdot)\| \|\Delta u_{mt}(t,\cdot)\|$$

$$+ C_{25} \|\Delta u_m(t,\cdot)\| \cdot \|\Delta u_{mt}(t,\cdot)\|$$

$$\leqslant \|\Delta u_{mt}(t,\cdot)\|^2 + C_{26}(T) \qquad (2.2.32)$$

把(2.2.25)，(2.2.31)和(2.2.32)代入(2.2.24)，并利用 Gronwall 不等式，得

$$\|\nabla u_{mt}(t,\cdot)\|^2 + \int_0^t \|\Delta u_{m\tau}(\tau,\cdot)\|^2 \mathrm{d}\tau$$

$$\leqslant C_{27}(T),\ t \in [0,T] \qquad (2.2.33)$$

(2.2.1)两端同乘以 $g_{mjt^2}(t)$，并对 $j=1,2,\cdots,m$ 求和，得到

$$\|u_{mt^2}(t,\cdot)\|^2 = (\operatorname{div}\{\sigma(\left|\nabla u_m\right|^2)\nabla u_m\} + \Delta u_m + \Delta u_{mt}$$

$$-\delta \left|u_{mt}\right|^{p-1} u_{mt} + \mu \left|u_m\right|^{q-1} u_m,\ u_{mt^2}) \qquad (2.2.34)$$

由(2.2.9)，(2.2.21)式，利用 Hölder 不等式和 Young 不等式，得

$$\left|\int_\Omega \operatorname{div}\{\sigma(\left|\nabla u_m(t,x)\right|^2 \nabla u_m(t,x)\} u_{mt^2}(t,x)\mathrm{d}x\right|$$

$$\leqslant \int_\Omega [\sigma(\nabla u_m(t,x)\left|^2\right) \left|\nabla^2 u_m(t,x)\right|$$

$$+2\left|\sigma'(\left|\nabla u_m(t,x)\right|^2)\right| \left|\nabla u_m(t,x)\right|^2 \cdot$$

$$(\sum_{i,j=1}^{N}\left|\frac{\partial^2 u_m(t,x)}{\partial x_i \partial x_j}\right|^2)^{\frac{1}{2}}] \left|u_{mt^2}(t,x)\right| \mathrm{d}x$$

$$\leqslant \frac{1}{10}\|u_{mt^2}(t,\cdot)\|^2 + C_{28}(T) \qquad (2.2.35)$$

由于 $1 \leqslant p \leqslant 1+\frac{2}{N}(N \geqslant 1)$，$1 < q < +\infty\ (N=1,2)$，$1 < q \leqslant \frac{N+2}{N-2}(N=3,4)$，$1+\frac{1}{N} \leqslant q \leqslant \min\{\frac{N+2}{N-2}, \frac{N-2}{N-4}\}(N>4)$，

利用(2.2.4)，(2.2.9)，(2.2.33)以及 Sobolev 嵌入定理，得到

$$\| u_{mt}(t,\cdot) \|_{2p}^{p} \leqslant C_{29} \| u_{mt}(t,\cdot) \|_{H^1(\Omega)}^{p} \leqslant C_{30}(T) \tag{2.2.36}$$

$$\| u_m(t,\cdot) \|_{2q}^{q} \leqslant C_{31} \| u_m(t,\cdot) \|_{H^2(\Omega)}^{q} \leqslant C_{32} \| \nabla^2 u_m(t,\cdot) \|^{q} \leqslant C_{33}(T) \tag{2.2.37}$$

利用(2.2.36)，(2.2.37)，并使用 Hölder 不等式及 Cauchy 不等式，得

$$\left| -\delta(\left| u_{mt} \right|^{p-1} u_{mt}, u_{mt^2}) \right| \leqslant \delta \| u_{mt}(t,\cdot) \|_{2p}^{p} \| u_{mt^2}(t,\cdot) \| \leqslant \frac{1}{10} \| u_{mt^2}(t,\cdot) \|^2 + C_{34}(T). \tag{2.2.38}$$

$$\left| \mu(\left| u_m \right|^{q-1} u_m, u_{mt^2}) \right| = \mu \| u_m(t,\cdot) \|_{2q}^{q} \| u_{mt^2}(t,\cdot) \| \leqslant \frac{1}{10} \| u_{mt^2}(t,\cdot) \|^2 + C_{35}(T). \tag{2.2.39}$$

利用(2.2.9)式和 Cauchy 不等式，得到

$$\left| (\Delta u_m, u_{mt^2}) \right| \leqslant \frac{1}{10} \| u_{mt^2}(t,\cdot) \| + C_{36}(T) \tag{2.2.40}$$

$$\left| (\Delta u_{mt}, u_{mt^2}) \right| \leqslant \frac{1}{10} \| u_{mt^2}(t,\cdot) \|^2 + C_{37} \| \Delta u_{mt}(t,\cdot) \|^2 \tag{2.2.41}$$

把(2.2.35)，(2.2.38)和(2.2.41)代入(2.2.34)，得到

$$\| u_{mt^2}(t,\cdot) \|^2 \leqslant C_{38} \| \Delta u_{mt}(t,\cdot) \|^2 + C_{39}(T) \tag{2.2.42}$$

对(2.2.42)在 $[0, t]$ 上积分，并利用(2.2.33)式，得

$$\int_0^t \| u_{m\tau^2}(\tau,\cdot) \|^2 d\tau \leqslant C_{40}(T), \; t \in [0, T] \tag{2.2.43}$$

由(2.2.33)和(2.2.43)知道(2.2.23)成立.引理得证。

第三节　问题(2.1.1)－(2.1.3)解的存在性与唯一性

在这一节中，证明问题(2.1.1)－(2.1.3)解的整体存在性与

唯一性。

定理2.3.1 假定下列条件成立:

(1) $\sigma(s) \in C^1[0, +\infty)$, 并存在常数 $K_i > 0(i=1,2,3)$ 使得对 $\forall v, v_1 \in R$, 有

$$
\begin{aligned}
0 \leqslant \sigma(v^2) \leqslant K_1, \left|\sigma'(v^2)\right| v^2 \\
\leqslant K_2, \left|\sigma(v_1^2) - \sigma(v^2)\right\|v\right| \\
+ \left|\sigma(v^2) - \sigma(v_1^2)\right\| v_1 \right| \\
\leqslant K_3 \left|v - v_1\right|.
\end{aligned}
$$

(2) $p \geqslant q$, 并且满足 $1 < q < +\infty$, $1 \leqslant p < +\infty\ (N=1,2)$

$$1 < q \leqslant \frac{N+2}{N-2}(N=3,4) \text{ 或 } 1+\frac{1}{N} \leqslant q \leqslant \min\left\{\frac{N+2}{N-2}, \frac{N-2}{N-4}\right\}$$

$(N>4)$, 并且 $1 \leqslant p \leqslant 1+\dfrac{2}{N}(N \geqslant 3)$

(3) $u_0 \in W \cap H^2(\Omega)$, $u_1 \in H_0^1(\Omega) \cap L^{p+1}(\Omega)$, $\int_0^{|\nabla u_0(x)|^2} \sigma(s)\mathrm{d}s \leqslant K_4$

$$\mu[C(\Omega, q+1)]^{q+1}\left[\frac{2(q+1)}{q-1}E(u_0(\cdot))\right] < 1$$

其中 $K_4 > 0$, $\mu > 0$ 是常数, 则问题(2.1.1)-(2.1.3)有唯一的整体广义解 $u(t,x)$, 并且满足

$$u(t,x) \in L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)) \tag{2.3.1}$$

$$u_t(t,x) \in L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega)) \cap L^2(0,T;H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)) \cap L^{p+1}(Q_T) \tag{2.3.2}$$

$$u_{tt}(t,x) \in L^2(0,T;L^2(\Omega)) \tag{2.3.3}$$

且对 $\forall w \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega)) \cap L^{p+1}(Q_T)$

$$
\begin{aligned}
\int_0^T \int_\Omega \{u_{tt} - \operatorname{div}[\sigma(|\nabla u|^2)\nabla u] - \Delta u - \Delta u_t \\
+ \delta |u_t|^{p-1}u_t - \mu |u|^{q-1}u\} w \mathrm{d}x\mathrm{d}t = 0
\end{aligned}
\tag{2.3.4}
$$

证明 由引理2.2.1，2.2.2和2.2.3知道

$$\| u_m(t,\cdot) \|_{H^2(\Omega)}^2 + \| u_{mt}(t,\cdot) \|_{H^1(\Omega)}^2 + \int_0^t (\| \Delta u_{m\tau}(\tau,\cdot) \|^2 + \| u_{m\tau^2}(\tau,\cdot) \|^2) d\tau + \int_0^t \| u_{m\tau}(\tau,\cdot) \|_{p+1}^{p+1} d\tau$$

$$\leqslant C_{41}(T),\ t \in [0, T]. \tag{2.3.5}$$

根据上述估计式，$\{u_m(t, x)\}$ 存在子序列（仍然记作）$\{u_m(t, x)\}$ 满足当 $m \to +\infty$ 时

$$\{u_m(t, x)\} \text{ 在 } L^2(0, T; H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)) \text{ 中弱收敛于 } u(t, x) \tag{2.3.6}$$

$$\{u_{mt}(t, x)\} \text{ 在 } L^2(0, T; H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)) \text{ 中弱收敛于 } u_t(t, x) \tag{2.3.7}$$

$$\{u_{mt^2}(t, x)\} \text{ 在 } L^2(0, T; L^2(\Omega)) \text{ 中弱收敛于 } u_{tt}(t, x) \tag{2.3.8}$$

$$\{u_{mt}(t, x)\} \text{ 在 } L^{p+1}(0, T; L^{p+1}(\Omega)) \text{ 中弱收敛于 } u_t(t, x) \tag{2.3.9}$$

现在证明当 $m \to +\infty$ 时

$$\left\{ \left| u_m(t, x) \right|^{q-1} u_m(t,x) \right\} \text{ 在 } L^{\frac{q+1}{q}}(Q_T) \text{ 中弱收敛于 } \left| u(t,x) \right|^{q-1} u(t,x) \tag{2.3.10}$$

$$\left\{ \left| u_{mt}(t,x) \right|^{p-1} u_{mt}(t,x) \right\} \text{ 在 } L^{\frac{p+1}{p}}(Q_T) \text{ 中弱收敛于 } \left| u_t(t,x) \right|^{p-1} u_t(t,x) \tag{2.3.11}$$

事实上，由于

$$\begin{aligned} &\int_0^t \| \left| u_m(\tau,\cdot) \right|^{q-1} u_m(\tau,\cdot) \|_{L^{\frac{q+1}{q}}(\Omega)}^{\frac{q+1}{q}} d\tau \\ &= \int_0^t \| u_m(\tau,\cdot) \|_{q+1}^{q+1} d\tau \\ &\leqslant [C(\Omega, q+1)]^{q+1} \int_0^t \| \nabla u_m(\tau,\cdot) \|^{q+1} d\tau \\ &\leqslant C_{42}(T),\ t \in [0, T] \end{aligned} \tag{2.3.12}$$

$$\begin{aligned}
&\int_0^t \| |u_{m\tau}(\tau,\cdot)|^{p-1}u_{m\tau}(\tau,\cdot)\|_{L^{\frac{p+1}{p}}(\Omega)}^{\frac{p+1}{p}} \\
&= \int_0^t\int_\Omega |u_{m\tau}(\tau,x)|^{p+1}\mathrm{d}x\mathrm{d}\tau \\
&\leqslant C_{43}(T),\ t\in[0,T] \qquad (2.3.13)
\end{aligned}$$

由(2.3.12)知道存在 $\varphi(t,x)\in L^{\frac{q+1}{q}}(Q_T)$，满足当 $m\to+\infty$ 时，有

$$\left\{|u_m(t,x)|^{q-1}u_m(t,x)\right\} \text{在} L^{\frac{q+1}{q}}(Q_T) \text{中弱收敛于} \varphi(t,x) \qquad (2.3.14)$$

由于

$$H^1(Q_T)\hookrightarrow L^2(Q_T) \qquad (2.3.15)$$

是紧的，因而可以从 $\{u_m(t,x)\}$ 中选取子列（还记作）$\{u_m(t,x)\}$ 满足当 $m\to+\infty$ 时，序列 $\{u_m(t,x)\}$ 在 $L^2(Q_T)$ 中收敛于 $u(t,x)$，进而 $\{u_m(t,x)\}$ 在 Q_T 中几乎处处收敛于 $u(t,x)$. 因此，在 Q_T 中

$$\left\{|u_m(t,x)|^{q-1}u_m(t,x)\right\} \text{几乎处处收敛于} |u(t,x)|^{q-1}u(t,x) \qquad (2.3.16)$$

由(2.3.12)和(2.3.16)并利用引理2.1.2知道

$$\varphi(t,x)=|u(t,x)|^{q-1}u(t,x) \qquad (2.3.17)$$

同理可以证明(2.3.11)成立。

接下来，证明子序列 $\{\mathrm{div}[\sigma(|\nabla u_m(t,x)|^2)\nabla u_m(t,x)]\}$ 在 $L^2(Q_T)$ 中弱收敛于 $\mathrm{div}[\sigma(|\nabla u(t,x)|^2)\nabla u(t,x)]$（$m\to+\infty$ 时）。事实上，对 $\forall w\in L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$，

$$\begin{aligned}
&\left|\int_0^T\int_\Omega \mathrm{div}\{\sigma(|\nabla u_m|^2)\nabla u_m-\sigma(|\nabla u|^2)\nabla u\}w\mathrm{d}x\mathrm{d}t\right| \\
&=\left|\int_0^T\int_\Omega\{\sigma(|\nabla u_m|^2(\nabla u_m-\nabla u)+[\sigma(|\nabla u_m|^2)\right.
\end{aligned}$$

$$-\sigma(|\nabla u|^2)]\nabla u\}\nabla w\mathrm{d}x\mathrm{d}t\Big|$$
$$\leqslant K_1\int_0^T\int_\Omega|\nabla u_m-\nabla u||\nabla w|\mathrm{d}x\mathrm{d}t+\int_0^T\int_\Omega|\sigma(|\nabla u_m|^2)$$
$$-\sigma(|\nabla u|^2)||\nabla u||\nabla w|\mathrm{d}x\mathrm{d}t$$
$$\leqslant K_1\int_0^T\int_\Omega|\nabla u_m-\nabla u||\nabla w|\mathrm{d}x\mathrm{d}t+K_3\int_0^T\int_\Omega|\nabla u_m$$
$$-\nabla u||\nabla w|\mathrm{d}x\mathrm{d}t\leqslant C_{44}\int_0^T\|\nabla u_m-\nabla u\|\|\nabla w\|\mathrm{d}t \tag{2.3.18}$$

由于 $H^2(Q_T)\searrow H^1(Q_T)$ 是紧嵌入，因此可以从 $\{u_m(t,x)\}$ 中选取子序列（仍然记作）$\{u_m(t,x)\}$，满足：$m\to+\infty$ 时，$\{\nabla u_m(t,x)\}$ 在 $L^2(Q_T)$ 中收敛于 $L^2(Q_T)$。利用(2.3.18)式，知：当 $m\to+\infty$ 时，$\{\mathrm{div}(\sigma(|\nabla u_m(t,x)|^2)\nabla u_m(t,x))\}$ 在 $L^2(Q_T)$ 中弱收敛于 $\mathrm{div}(\sigma(|\nabla u(t,x)|^2)\nabla u(t,x))$。

由(2.3.6)－(2.3.8)，(2.3.10)，(2.3.13)和(2.3.18)知

$$\int_0^T\int_\Omega\{u_{tt}-\mathrm{div}[\sigma(|\nabla u|^2)\nabla u]-\Delta u-\Delta u_t$$
$$+\delta|u_t|^{p-1}u_t-\mu|u|^{q-1}u\}w\mathrm{d}x\mathrm{d}t=0$$

对 $\forall w\in L^2(0,T;H_0^1(\Omega))\cap L^{p+1}(Q_T)$ 成立，并且(2.3.1)－(2.3.3)成立。

现在证明(2.1.3)成立。

由(2.3.6)，(2.3.7)和引理2.1.3，得 $\{u_m(0,x)\}$ 在 $L^2(\Omega)$ 中弱收敛于 $u(0,x)$，而 $u_m(0,x)=u_{0m}$ 在 $L^2(\Omega)$ 中收敛于 $u_0(x)$，因而 $u(0,x)=u_0(x)$。

同理可证 $u_t(0,x)=u_1(x)$。

现在证明解的唯一性。

设 $v_1(t,x)$ 和 $v_2(t,x)$ 是问题(2.1.1)－(2.1.3)的两个广义

解。

因此 $u(t,x)=v_1(t,x)-v_2(t,x)$ 满足如下问题：

$$\begin{aligned}&u_{tt}-\Delta u-\Delta u_t-\Big\{\operatorname{div}(\sigma(\left|\nabla v_1\right|^2)\nabla v_1\\&\quad-\operatorname{div}((\left|\nabla v_2\right|^2)\nabla v_2)\Big\}+\delta\left|v_{1t}\right|^{p-1}v_{1t}-\delta\left|v_{2t}\right|^{p-1}v_{2t}\\&=\mu\left|v_1\right|^{q-1}v_1-\mu\left|v_2\right|^{q-1}v_2,\ x\in\Omega,\ t>0\end{aligned}\tag{2.3.19}$$

$$u\Big|_{\partial\Omega}=0,\ t>0\tag{2.3.20}$$

$$u(0,x)=0,\ u_t(0,x)=0,\ x\in\Omega\tag{2.3.21}$$

(2.3.19)两端同乘以 $2u_t$，并同时加上 $2uu_t$，然后在 Ω 上积分，通过分部积分，可以得到

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}(\|u\|^2+\|u_t\|^2+\|\nabla u\|^2)+2\|\nabla u_t\|^2\\&\quad+2\int_\Omega\{\sigma(\left|\nabla v_1\right|^2)\nabla v_1-\sigma(\left|\nabla v_2\right|^2)\nabla v_2\}\nabla u_t\mathrm{d}x\\&\quad+2\int_\Omega(\delta\left|v_{1t}\right|^{p-1}v_{1t}-\delta\left|v_{2t}\right|^{p-1}v_{2t})(v_{1t}-v_{2t})\mathrm{d}x\\&=2\int_\Omega(\mu\left|v_1\right|^{q-1}v_1-\mu\left|v_2\right|^{q-1}v_2)u_t\mathrm{d}x+2\int_\Omega uu_t\mathrm{d}x\end{aligned}\tag{2.3.22}$$

易知

$$\int_\Omega(\left|v_{1t}\right|^{p-1}v_{1t}-\left|v_{2t}\right|^{p-1}v_{2t})(v_{1t}-v_{2t})\mathrm{d}t\geqslant0\tag{2.3.23}$$

当 $N\geqslant2$ 时，有

$$\begin{aligned}&\left|\int_\Omega(\left|v_1\right|^{q-1}v_1-\left|v_2\right|^{q-1}v_2)u_t\mathrm{d}x\right|\\&\quad\leqslant q\int_\Omega\sup(\left|v_1\right|^{q-1},\left|v_2\right|^{q-1})\left|u\right|\left|u_t\right|\mathrm{d}x\\&\quad\leqslant C_{45}(\|\left|v_1\right|^{q-1}\|_N+\|\left|v_2\right|^{q-1}\|_N)\|u\|_r\|u_t\|\end{aligned}$$

其中 $\frac{1}{N}+\frac{1}{2}+\frac{1}{r}=1$. 由于 $(q-1)N\leqslant r,\ r=\frac{2N}{N-2}$ 以及 $H^1(\Omega)\hookrightarrow L^r(\Omega)$，有

$$\| |v_1|^{q-1} \|_N = \|v_1\|_{N(q-1)}^{q-1} \leqslant C_{46} \|\nabla v_1\|^{q-1}$$

$$\| |v_2|^{q-1} \|_N \leqslant C_{47} \|\nabla v_2\|^{q-1}$$

由于 $v_1, v_2 \in L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega))$，因而

$$\begin{aligned}&\left|\int_\Omega (|v_1|^{q-1}v_1 - |v_2|^{q-1}v_2)u_t\mathrm{d}x\right|\\&\leqslant C_{48}(\|\nabla v_1\|^{q-1} + \|\nabla v_2\|^{q-1})\|\nabla u\|\|u_t\|\\&\leqslant C_{49}(\|\nabla u\|^2 + \|u_t\|^2).\end{aligned} \tag{2.3.24}$$

注意到关于 $\sigma(s)$ 的假定，得

$$\begin{aligned}&\left|\int_\Omega \{\sigma(|\nabla v_1|^2)\nabla v_1 - \sigma(|\nabla v_2|^2)\nabla v_2\}\nabla u_t\mathrm{d}x\right|\\&= \left|\int_\Omega \{[\sigma(|\nabla v_1|^2) - \sigma(|\nabla v_2|^2)]\nabla v_1 + \sigma(|\nabla v_2|^2)\right.\\&\quad\left.(\nabla v_1 - \nabla v_2)\}\nabla u_t\mathrm{d}x\right|\\&\leqslant \int_\Omega \{|\sigma(|\nabla v_1|^2) - \sigma(|\nabla v_2|^2)||\nabla v_1||\nabla u_t|\}\mathrm{d}x\\&\quad + \int_\Omega \sigma(|\nabla v_2|^2)|\nabla v_1 - \nabla v_2||\nabla u_t|\mathrm{d}x\\&\leqslant C_{50}\int_\Omega |\nabla v_1 - \nabla v_2||\nabla u_t|\mathrm{d}x\\&\leqslant C_{51}\|\nabla u\|^2 + \frac{1}{2}\|\nabla u_t\|^2\end{aligned} \tag{2.3.25}$$

从(2.3.22) – (2.3.25)可知

$$\begin{aligned}&\|u\|^2 + \|u_t\|^2 + \|\nabla u\|^2\\&\leqslant C_{52}\int_0^t (\|u\|^2 + \|u_\tau\|^2 + \|\nabla u\|^2)\mathrm{d}\tau\end{aligned}$$

因而 $u = 0$.

当 $N = 1$ 时，$H^2(\Omega) \searrow C^1(\overline{\Omega})$. 因此，根据中值定理，有

$$\begin{aligned}&\left|\int_\Omega (|v_1|^{q-1}v_1 - |v_2|^{q-1}v_2)u_t\mathrm{d}x\right|\\&= q\int_\Omega |\lambda v_1 + (1-\lambda)v_2|^{q-1}|u||u_t|\mathrm{d}x\end{aligned}$$

$$\leqslant C_{53}(\|u\|^2+\|u_t\|^2)$$

其中$0<\lambda<1$. 由于(2.3.23)和(2.3.25)对$N=1$成立，因而对$N=1$，也有$u=0$.

定理证毕。

注2.3.1　满足定理2.3.1中条件(1)的函数$\sigma(s)$是存在的。例如：

$\sigma(v^2)=\dfrac{1}{\sqrt{1+v^2}}$就满足定理中的(1). 事实上，

$0\leqslant\sigma(v^2)\leqslant K_1$，$\left|\sigma'(v^2)\right|v^2=\dfrac{v^2}{2(1+v^2)^{\frac{3}{2}}}\leqslant K_2$，且

$$\left|\sigma(v_1^2)-\sigma(v^2)\|v\right|+\left|\sigma(v^2)-\sigma(v_1^2)\|v_1\right|$$

$$=\left|\frac{1}{\sqrt{1+v_1^2}}-\frac{1}{\sqrt{1+v^2}}\|v\right|+\left|\frac{1}{\sqrt{1+v_1^2}}-\frac{1}{\sqrt{1+v^2}}\|v_1\right|$$

$$=\frac{\left|v^2-v_1^2\right|(\left|v\right|+\left|v_1\right|)}{\sqrt{1+v^2}(1+v_1^2)+\sqrt{1+v_1^2}(1+v^2)}$$

$$\leqslant\frac{\left|v-v_1\right|(\left|v\right|+\left|v_1\right|)^2}{\left|v_1^2\right|+\left|v\right|^2}\leqslant 2\left|v-v_1\right|$$

第四节　问题(2.1.1)－(2.1.3)解的爆破

定理2.4.1　假定下列条件满足：

(1) $\delta>0$, $\mu>0$, $1\leqslant p<2$, $q>\dfrac{p}{2-p}$；

(2) $s\sigma(s)\leqslant K\int_0^s\sigma(y)dy$, $\int_0^s\sigma(y)dy\leqslant-\alpha\left|s\right|^{\frac{q+1}{2}}$, $K>2$和$\alpha>0$是常数；

(3) $u_0\in H_0^1(\Omega)\cap L^{q+1}(\Omega)$, $u_1\in H_0^1(\Omega)$，且

$$\hat{E}(0) = \|u_1\|^2 + \frac{q-1}{q+1}\|\nabla u_0\|^2 + \frac{2}{q+1}(\|\nabla u_0\|^2 - \mu\|u_0\|_{q+1}^{q+1}) + 2\int_\Omega\int_0^{|\nabla u_0|^2}\sigma(s)\,\mathrm{d}s\mathrm{d}x$$

$$\leqslant -\frac{1}{2d}\left(\frac{ab^{\frac{2}{2-p}}}{\varepsilon}\right)^d - \left[\frac{2}{(A2^{3-q}/(q+3))^{\frac{2}{q-1}}(1-e^{-\frac{q-1}{4}})^{\frac{4}{q-1}}}\right] < 0,$$

其中 $a = \frac{2-p}{2}\left(\frac{\delta^2 p^p}{4^{p-1}}\right)^{\frac{1}{2-p}}, b = \left|\Omega\right|^{\frac{2-p}{2}-\frac{1}{q+1}}, \varepsilon = \left(\frac{\mu(q-1)(2-p)}{2}\right)^{\frac{2}{(2-p)(q+1)}}$,

$c = \frac{(2-p)(q+1)}{2}, d = \frac{(2-p)(q+1)}{(2-p)q-p}, A = \min\left\{\frac{(q-1)\mu}{2(q+1)}\left|\Omega\right|^{\frac{1-q}{2}}, (K-2)\alpha\left|\Omega\right|^{\frac{1-q}{2}}\right\}$,

$\left|\Omega\right|$ 表示 Ω 的测度。

则问题(2.1.1) - (2.1.3)的广义解 $u(t, x)$ 在有限时刻 $\bar{T}$ 爆破. 即当 $t \to \bar{T}^-$ 时

$$\|u(t,\cdot)\|^2 + \int_0^t\int_\Omega\left|\nabla u(\tau,x)\right|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}\tau + \int_0^t\int_0^\tau\int_\Omega\left|\nabla u(s,x)\right|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}s\mathrm{d}\tau \to +\infty$$

证明 方程(2.1.1)两端同乘以 $2u_t$, 并在 Ω 上积分, 得

$$\hat{E}(t) = \hat{E}(0), \ t > 0, \tag{2.4.1}$$

其中

$$\hat{E}(t) = \|u_t(t,\cdot)\|^2 + \frac{q-1}{q+1}\|\nabla u(t,\cdot)\|^2 + \frac{2}{q+1}(\|\nabla u(t,\cdot)\|^2 - \mu\|u\|_{q+1}^{q+1}) + 2\int_\Omega\int_0^{|\nabla u(t,x)|^2}\sigma(s)\,\mathrm{d}s\mathrm{d}x + 2\delta\int_0^t\|u_\tau(\tau,\cdot)\|_{p+1}^{p+1}\mathrm{d}\tau + 2\int_0^t\|\nabla u_\tau(\tau,\cdot)\|^2\mathrm{d}\tau$$

记

$$M(t) = \|u(t,\cdot)\|^2 + \int_0^t\int_\Omega\left|\nabla u(\tau,x)\right|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}\tau$$

$$+\int_0^t\int_0^\tau\int_\Omega\left|\nabla u(s,x)\right|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}s\mathrm{d}\tau. \tag{2.4.2}$$

则

$$\dot{M}(t)=2\int_\Omega u(t,x)u_t(t,x)\mathrm{d}x+\int_\Omega\left|\nabla u(\tau,x)\right|^2\mathrm{d}x$$
$$+\int_0^t\int_\Omega\left|\nabla u(\tau,x)\right|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}\tau, \tag{2.4.3}$$

其中 $\dot{M}(t)=\frac{d}{\mathrm{d}t}M(t)$.

利用定理中的假定条件，使用分部积分，并注意到

$$K\int_\Omega\int^{|\nabla u(t,x)|^2}\sigma(s)\mathrm{d}s\mathrm{d}x$$
$$=\hat{E}(0)-\|u_t(t,\cdot)\|^2-\frac{q-1}{q+1}\|\nabla u(t,\cdot)\|^2$$
$$-\frac{2}{q+1}(\|\nabla u(t,\cdot)\|^2-\mu\|u(t,\cdot)\|_{q+1}^{q+1})$$
$$-2\delta\int_0^t\|u_\tau(\tau,\cdot)\|_{p+1}^{p+1}\mathrm{d}\tau+2\int_0^t\|\nabla u_\tau(\tau,\cdot)\|^2\mathrm{d}\tau$$
$$+(K-2)\int_\Omega\int_0^{|\nabla u(t,x)|^2}\sigma(s)\mathrm{d}s\mathrm{d}x \tag{2.4.4}$$

得

$$\ddot{M}(t)=2\int_\Omega\{u_t^2(t,x)+u(t,x)u_{tt}(t,x)+\nabla u(t,x)\nabla u_t(t,x)$$
$$+\frac{1}{2}\left|\nabla u(t,x)\right|^2\}\mathrm{d}x=2\int_\Omega\{u_t^2(t,x)+u(t,x)$$
$$[\mathrm{div}[\sigma(\left|\nabla u(t,x)\right|^2)\nabla u(t,x)]+\Delta u(t,x)$$
$$+\Delta u_t(t,x)-\delta\left|u_t\right|^{p-1}u_t(t,x)+\mu\left|u(t,x)\right|^{q-1}u(t,x)]$$
$$+\nabla u(t,x)\nabla u_t(t,x)+\frac{1}{2}\left|\nabla u(t,x)\right|^2\}\mathrm{d}x$$
$$=2\int_\Omega\{\left|u_t(t,x)\right|^2-\sigma(\left|\nabla u(t,x)\right|^2)\left|\nabla u(t,x)\right|^2$$

$$
\begin{aligned}
&-\left|\nabla u(t,x)\right|^2-\delta\left|u_t(t,x)\right|^{p-1}u_t(t,x)u(t,x)\\
&+\mu\left|u(t,x)\right|^{q+1}+\frac{1}{2}\left|\nabla u(t,x)\right|^2\}\mathrm{d}x\\
\geqslant\ &2\{2\|u_t(t,\cdot)\|^2-\hat{E}(0)+\frac{(q-1)\mu}{q+1}\|u(t,\cdot)\|_{q+1}^{q+1}\\
&+2\delta\int_0^t\|u_\tau(\tau,\cdot)\|_{p+1}^{p+1}\mathrm{d}\tau+2\int_0^t\|\nabla u_\tau(\tau,\cdot)\|^2\mathrm{d}\tau\\
&-(K-2)\int_\Omega\int_0^{|\nabla u(t,x)|^2}\sigma(s)\,\mathrm{d}s\mathrm{d}x\\
&-\delta\int_\Omega\left|u_t(t,x)\right|^{p-1}u_t(t,x)u(t,x)\,\mathrm{d}x\\
&+\frac{1}{2}\|\nabla u(t,\cdot)\|^2\}\geqslant 2\{2\|u_t(t,\cdot)\|^2-\hat{E}(0)\\
&+\frac{(q-1)\mu}{q+1}\|u(t,\cdot)\|_{q+1}^{q+1}+2\delta\int_0^t\|u_\tau(\tau,\cdot)\|_{p+1}^{p+1}\mathrm{d}\tau\\
&+2\int_0^t\|\nabla u_\tau(\tau,\cdot)\|^2\mathrm{d}\tau\\
&+\alpha(K-2)\int_\Omega\left|\nabla u(t,x)\right|^{q+1}\mathrm{d}x-\delta\int_\Omega\left|u_t(t,x)\right|^{p-1}\\
&u_t(t,x)u(t,x)\,\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\|\nabla u(t,\cdot)\|^2\}. \qquad (2.4.5)
\end{aligned}
$$

利用 Hölder 不等式和带参数 ε 的 Young 不等式，得

$$
\begin{aligned}
\left|2\delta\int_\Omega\left|u_t\right|^{p-1}u_tu\,\mathrm{d}x\right| &\leqslant 2\delta\|u_t\|^p\|u\|_{\frac{2}{2-p}}\\
&\leqslant 2\|u_t\|^2+a\|u\|_{\frac{2}{2-p}}^{\frac{2}{2-p}}, \qquad (2.4.6)
\end{aligned}
$$

其中 $a=\frac{2-p}{2}(\frac{\delta^2p^p}{4^{p-1}})^{\frac{1}{2-p}}$。

由于 $\frac{2}{2-p}<q+1$，利用 Sobolev 嵌入定理，得到

$$
\|u\|_{\frac{2}{2-p}}\leqslant b\|u\|_{q+1}, \qquad (2.4.7)
$$

其中 $b=\left|\Omega\right|^{\frac{2-p}{2}-\frac{1}{q+1}}$。

取 $\varepsilon = (\frac{\mu(q-1)(2-p)}{2})^{\frac{2}{(2-p)(q+1)}}$，注意到 $c = \frac{(2-p)(q+1)}{2}$ 和 $d = \frac{(2-p)(q+1)}{(2-p)q-p}$ 是共轭指数，利用(2.4.7)式与带参数 ε 的 Young 不等式，得

$$a\|u\|^{2}_{\frac{2p}{2-p}} \leqslant ab^{\frac{2}{2-p}}\|u\|^{\frac{2}{2-p}}_{q+1} \leqslant \frac{(q-1)\mu}{q+1}\|u\|^{q+1}_{q+1} + \frac{1}{d}(\frac{ab^{\frac{2}{2-p}}}{\varepsilon})^{d}. \tag{2.4.8}$$

把(2.4.8)式代入(2.4.6)式，得到

$$\left|2\delta\int_{\Omega}\left|u_t\right|^{p-1}u_t u\mathrm{d}x\right| \leqslant 2\|u_t\|^2 + \frac{(q-1)\mu}{q+1}\|u\|^{q+1}_{q+1} + \frac{1}{d}(\frac{ab^{\frac{2}{2-p}}}{\varepsilon})^{d}. \tag{2.4.9}$$

把(2.4.9)式及 $\int_0^s \sigma(y)dy \leqslant -\alpha\left|s\right|^{\frac{q+1}{2}}$ 代入(2.4.5)式，得

$$\begin{aligned}\ddot{M}(t) \geqslant{}& 2\|u_t(t,\cdot)\|^2 - 2\hat{E}(0) \\ &+ \frac{(q-1)\mu}{q+1}\|u\|^{q+1}_{q+1} + 2(K-2)\alpha\int_{\Omega}\left|\nabla u(t,x)\right|^{q+1}\mathrm{d}x \\ &+ \|\nabla u(t,\cdot)\|^2 - \frac{1}{d}(\frac{ab^{\frac{2}{2-p}}}{\varepsilon})^{d} > 0,\ t > 0.\end{aligned} \tag{2.4.10}$$

从(2.4.10)可以得

$$\begin{aligned}\dot{M}(t) \geqslant{}& (-2\hat{E}(0) - \frac{1}{d}(\frac{ab^{\frac{2}{2-p}}}{\varepsilon})^{d})t \\ &+ 2(K-2)\alpha\int_0^t\int_{\Omega}\left|\nabla u(\tau,x)\right|^{q+1}\mathrm{d}x\mathrm{d}\tau \\ &+ \int_0^t\int_{\Omega}\left|\nabla u(\tau,x)\right|^{2}\mathrm{d}x\mathrm{d}\tau + \dot{M}(0),\end{aligned} \tag{2.4.11}$$

$$\begin{aligned}M(t) \geqslant{}& 2(K-2)\alpha\int_0^t\int_0^{\tau}\int_{\Omega}\left|\nabla u(s,x)\right|^{q+1}\mathrm{d}x\mathrm{d}s\mathrm{d}\tau \\ &- \frac{1}{2}(2\hat{E}(0) + \frac{1}{d}(\frac{ab^{\frac{2}{2-p}}}{\varepsilon})^{d})t^2 + \dot{M}(0)t + M(0),\end{aligned} \tag{2.4.12}$$

其中

$$\dot{M}(0)=2\int_{\Omega}u_0(x)u_1(x)\mathrm{d}x+\int_{\Omega}\left|\nabla u_0(x)\right|^2\mathrm{d}x,$$
$$M(0)=\|u_0\|^2.$$

由(2.4.10)-(2.4.12)得

$$\begin{aligned}
&\ddot{M}(t)+\dot{M}(t)+M(t)\\
&\geqslant 2\|u_t(t,\cdot)\|^2\\
&\quad+\frac{(q-1)}{q+1}\|u(t,\cdot)\|_{q+1}^{q+1}+\|\nabla u(t,\cdot)\|^2\\
&\quad+2(K-2)\alpha\int_0^t\int_{\Omega}\left|\nabla u(\tau,x)\right|^{q+1}\mathrm{d}x\mathrm{d}\tau\\
&\quad+2(K-2)\alpha\int_0^t\int_0^{\tau}\int_{\Omega}\left|\nabla u(s,x)\right|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}s\mathrm{d}\tau\\
&\quad+\int_0^t\int_{\Omega}\left|\nabla u(\tau,x)\right|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}\tau-\left(2\hat{E}(0)+\frac{1}{d}\left(\frac{ab^{\frac{2}{2-p}}}{\varepsilon}\right)^d\right)\left(\frac{t^2}{2}+t+1\right)\\
&\quad+\dot{M}(0)(t+1)+M(0).
\end{aligned}\tag{2.4.13}$$

把(2.4.3)代入(2.4.13)可以得到

$$\begin{aligned}
&\ddot{M}(t)+2\int_{\Omega}u(t,x)u_t(t,x)\mathrm{d}x\\
&\quad+\int_{\Omega}\left|\nabla u(t,x)\right|^2\mathrm{d}x+\int_0^t\int_{\Omega}\left|\nabla u(\tau,x)\right|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}\tau+M(t)\\
&\geqslant 2\|u_t(t,\cdot)\|^2+\frac{(q-1)\mu}{q+1}\|u(t,\cdot)\|_{q+1}^{q+1}\\
&\quad+\int_{\Omega}\left|\nabla u(t,x)\right|^2\mathrm{d}x+2(K-2)\alpha\int_0^t\int_{\Omega}\left|\nabla u(\tau,x)\right|^{q+1}\mathrm{d}x\mathrm{d}\tau\\
&\quad+2(K-2)\alpha\int_0^t\int_0^{\tau}\int_{\Omega}\left|\nabla u(s,x)\right|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}s\mathrm{d}\tau\\
&\quad+\int_0^t\int_{\Omega}\left|\nabla u(\tau,x)\right|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}\tau-\left(2\hat{E}(0)+\frac{1}{d}\left(\frac{ab^{\frac{2}{2-p}}}{\varepsilon}\right)^d\right)\left(\frac{t^2}{2}+t+1\right)\\
&\quad+\dot{M}(0)(t+1)+M(0).
\end{aligned}\tag{2.4.14}$$

由于 $\ddot{M}(t)>0$, $M(t)\geqslant 0$ 和

$$2\int_\Omega u(t,x)u_t(t,x)\mathrm{d}x \leqslant \|u(t,\cdot)\|^2+\|u_t(t,\cdot)\|^2,$$

由(2.4.14)可得

$$\begin{aligned}
&\ddot{M}(t)+M(t)\\
&\geqslant \frac{(q-1)\mu}{2(q+1)}\int_\Omega |u(t,x)|^{q+1}\mathrm{d}x\\
&\quad+(K-2)\alpha\int_0^t\int_\Omega |\nabla u(\tau,x)|^{q+1}\mathrm{d}x\mathrm{d}\tau\\
&\quad+(K-2)\alpha\int_0^t\int_0^\tau\int_\Omega |\nabla u(s,x)|^{q+1}\mathrm{d}x\mathrm{d}s\mathrm{d}\tau\\
&\quad-[\hat{E}(0)+\frac{1}{2d}(\frac{ab^{\frac{2}{2-p}}}{\varepsilon})^d](\frac{t^2}{2}+t+1)\\
&\quad+\frac{1}{2}\dot{M}(0)(t+1)+\frac{1}{2}M(0).
\end{aligned}\tag{2.4.15}$$

利用 Hölder 不等式得到

$$\int_\Omega |u(t,x)|^{q+1}\mathrm{d}x \geqslant |\Omega|^{\frac{1-q}{2}}(\int_\Omega |u(t,x)|^2\mathrm{d}x)^{\frac{q+1}{2}};\tag{2.4.16}$$

$$\begin{aligned}
&\int_0^t\int_\Omega |\nabla u(\tau,x)|^{q+1}\mathrm{d}x\\
&\quad\geqslant |\Omega|^{\frac{1-q}{2}}t^{\frac{1-q}{2}}(\int_0^t\int_\Omega |\nabla u(\tau,x)|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}\tau)^{\frac{q+1}{2}};
\end{aligned}\tag{2.4.17}$$

$$\begin{aligned}
&\int_0^t\int_0^\tau\int_\Omega |\nabla u(s,x)|^{q+1}\mathrm{d}x\mathrm{d}s\mathrm{d}\tau\\
&\quad\geqslant |\Omega|^{\frac{1-q}{2}}2^{\frac{q-1}{2}}t^{1-q}(\int_0^t\int_0^\tau\int_\Omega |\nabla u(s,x)|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}s\mathrm{d}\tau)^{\frac{q+1}{2}}.
\end{aligned}\tag{2.4.18}$$

把(2.4.16)-(2.4.18)代入(2.4.15)，并利用不等式

$$(a+b+c)^m \leqslant 2^{2(m-1)}(a^m+b^m+c^m), a,b,c>0, m>1,$$

得到

$$\ddot{M}(t)+M(t)$$

$$\geqslant A\{(\int_\Omega |u(t,x)|^2 dx)^{\frac{q+1}{2}}$$

$$+t^{\frac{1-q}{2}}[\int_0^t\int_\Omega |\nabla u(\tau,x)|^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}\tau]^{\frac{q+1}{2}}$$

$$+2^{\frac{q-1}{2}}t^{1-q}[\int_0^t\int_0^\tau\int_\Omega |\nabla u(s,x)|^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}s\mathrm{d}\tau]^{\frac{q+1}{2}}\}$$

$$-[\hat{E}(0)+\frac{1}{2d}(\frac{ab^{\frac{2}{2-p}}}{\varepsilon})^d](\frac{t^2}{2}+t+1)+\frac{\dot{M}(0)}{2}(t+1)+\frac{M(0)}{2}$$

$$\geqslant A2^{1-q}t^{1-q}M^{\frac{q+1}{2}}(t)-[\hat{E}(0)+\frac{1}{2d}(\frac{ab^{\frac{2}{2-p}}}{2\varepsilon})^d](\frac{t^2}{2}+t+1)$$

$$+\frac{\dot{M}(0)}{2}(t+1)+\frac{M(0)}{2},\ t\geqslant 1. \tag{2.4.19}$$

由(2.4.11),(2.4.12)知道:当 $t\to+\infty$, $\dot{M}(t)\to+\infty$, $M(t)\to+\infty$。因而存在 $t_0>1$ 使当 $t\geqslant t_0$ 时, $\dot{M}(t)>0$, $M(t)>0$。(2.4.19)式两端同乘以 $2\dot{M}(t)$,并利用(2.4.11),得

$$\frac{d}{\mathrm{d}t}[\dot{M}^2(t)+M^2(t)]\geqslant A_1t^{1-q}\frac{d}{\mathrm{d}t}M^{\frac{q+3}{2}}(t)+B(t),\ t\geqslant t_0, \tag{2.4.20}$$

其中 $A_1=\frac{A2^{3-q}}{q+3}$,

$$B(t)=\Big\{\Big[-4\hat{E}(0)-\frac{2}{d}(\frac{ab^{\frac{2}{2-p}}}{\varepsilon})^d\Big]t$$

$$+2\dot{M}(0)\Big\}\Big\{-\Big[\hat{E}(0)+\frac{1}{2d}(\frac{ab^{\frac{2}{2-p}}}{2\varepsilon})^d\Big](\frac{t^2}{2}+t+1)$$

$$+\frac{\dot{M}(0)}{2}(t+1)+\frac{M(0)}{2}\Big\}.$$

由(2.4.20)得

$$\frac{d}{\mathrm{d}t}[t^{q-1}(\dot{M}^2(t)+M^2(t)-A_1M^{\frac{q+3}{2}}(t)]\geqslant t^{q-1}B(t),\ t\geqslant t_0. \tag{2.4.21}$$

(2.4.21)两端在 (t_0, t) 上积分，得

$$t^{q-1}(\dot{M}^2(t)+M^2(t))-A_1M^{\frac{q+3}{2}}(t)$$
$$\geqslant \int_{t_0}^{t}\tau^{q-1}B(\tau)\mathrm{d}\tau+t_0^{q-1}(\dot{M}^2(t_0)+M^2(t_0)-A_1M^{\frac{q+3}{2}}(t_0)),\ t\geqslant t_0 \tag{2.4.22}$$

注意到当 $t\to+\infty$ 时，(2.4.22)的右端项趋于 $+\infty$，因而存在 $t_1\geqslant t_0$，使得当 $t\geqslant t_1$ 时，(2.4.22)的右端项大于或等于零，因此，有

$$t^{q-1}(\dot{M}^2(t)+M^2(t))\geqslant A_1M^{\frac{q+3}{2}}(t),\ t\geqslant t_1, \tag{2.4.23}$$

(2.4.23)两端开平方，得

$$\dot{M}(t)+M(t)\geqslant A_2t^{\frac{1-q}{2}}M^{\frac{q+3}{4}}(t),\ t\geqslant t_1, \tag{2.4.24}$$

其中 $A_2=\sqrt{A_1}$.

考虑下面的 Bernoulli 方程的初值问题

$$\begin{cases}\dot{Q}+Q=A_2t^{\frac{1-q}{2}}Q^{\frac{q+3}{4}},\ t>t_1\\ Q(t_1)=M(t_1).\end{cases} \tag{2.4.25}$$

求解(2.4.25)，可得

$$Q(t)=e^{-(t-t_1)}\{M^{\frac{1-q}{4}}(t_1)-\frac{A_1(q-1)}{4}\int_{t_1}^{t}\tau^{\frac{1-q}{2}}e^{-\frac{q-1}{4}(\tau-t_1)}\mathrm{d}\tau\}^{\frac{4}{1-q}}$$
$$=e^{-(t-t_1)}M(t_1)W^{\frac{4}{1-q}}(t),\ t\geqslant t_1, \tag{2.4.26}$$

其中

$$W(t)=1-\frac{A_2(q-1)}{4}M^{\frac{q-1}{4}}(t_1)\int_{t_1}^{t}\tau^{\frac{1-q}{2}}e^{-\frac{q-1}{4}(\tau-t_1)}\mathrm{d}\tau$$

显然 $W(t_1)=1$，并且

$$r(t)=\frac{A_2(q-1)}{4}M^{\frac{q-1}{4}}(t_1)\int_{t_1}^{t}\tau^{\frac{1-q}{2}}e^{-\frac{q-1}{4}(\tau-t_1)}\mathrm{d}\tau$$
$$\geqslant\frac{A_2(q-1)}{4}M^{\frac{q-1}{4}}(t_1)(t_1+1)^{\frac{1-q}{2}}\int_{t_1}^{t_1+1}e^{-\frac{q-1}{4}(\tau-t_1)}\mathrm{d}\tau$$
$$=A_2M^{\frac{q-1}{4}}(t_1)(t_1+1)^{\frac{1-q}{2}}(1-e^{-\frac{q-1}{4}}),\ t\geqslant t_1+1 \tag{2.4.27}$$

由(2.4.12)知,

$$M^{\frac{q-1}{4}}(t)(t+1)^{\frac{1-q}{2}}$$

$$\geqslant \left\{\frac{-\frac{1}{2}[2\hat{E}(0)+\frac{1}{d}(\frac{ab^{\frac{2}{2-p}}}{\varepsilon})^{d}]t^{2}+\dot{M}(0)t+M(0)}{(t+1)^{2}}\right\}^{\frac{q-1}{4}}$$

$$\to \left\{-\frac{1}{2}[2\hat{E}(0)+\frac{1}{d}(\frac{ab^{\frac{2}{2-p}}}{\varepsilon})^{d}]\right\}^{\frac{q-1}{4}}, t\to+\infty$$

取 t_1 充分大使得

$$M^{\frac{q-1}{4}}(t_1)(t_1+1)^{\frac{1-q}{2}} \geqslant \frac{1}{2}\left\{-\frac{1}{2}[2\hat{E}(0)+\frac{1}{d}(\frac{ab^{\frac{2}{2-p}}}{\varepsilon})^{d}]\right\}^{\frac{q-1}{4}}$$

由(2.4.27)和定理中的假定条件(3)得

$$r(t) \geqslant \frac{A_2}{2}\left\{-\frac{1}{2}[2\hat{E}(0)+\frac{1}{d}(\frac{ab^{\frac{2}{2-p}}}{\varepsilon})^{d}]\right\}^{\frac{q-1}{4}}(1-e^{-\frac{q-1}{4}}) \geqslant 1,$$

$t \geqslant t_1+1$。

因此

$$W(t)=1-r(t)\leqslant 0, t\geqslant t_1+1$$

利用 $W(t)$ 的连续性和介值定理,存在常数 $\bar{T}\in(t_1,t_1+1)$,使得 $W(\bar{T})=0$。因此当 $t\to\bar{T}^-$ 时,$Q(t)\to+\infty$。由引理2.1.4 知当 $t\geqslant t_1$ 时,$M(t)\geqslant Q(t)$。因此当 $t\to\bar{T}^-$ 时,$M(t)\to+\infty$。

定理证毕。

注2.4.1 满足定理(2.4.1)中条件(2),(3)的函数 $\sigma(s)$ 是存在的,

例如,$\sigma(s)=-s^{2k+1}(k=1,2,\cdots,)$。事实上,取 $\sigma(s)=-s^3$, $K=3$, $\alpha=\frac{1}{5}$, $\delta=1$, $\mu=1$, $p=1.2$ 和 $q=3$,则 $s\sigma(s)(=-s^4)<K\int_0^s(-y^3)dy(=-\frac{3}{4}s^4)$ 且 $-\int_0^s y^3dy(=-\frac{1}{4}s^4)<-\alpha\left|s\right|^{\frac{q+1}{2}}(=-\frac{1}{5}s^4)$ 成立。

取 $N = 1$, $\Omega = (0, 1)$, $u_0(x) = \frac{8}{5}x^2$, $u_1(x) = 1$, 则 $a = 0.37$, $b = 1$, $c = 1.6$, $d = 1.67$, $\varepsilon = 1.31$, $A = 0.20$, 且

$$\hat{E}(0) = -606.08 < -\frac{1}{2d}\left(\frac{ab^{\frac{2}{2-p}}}{\varepsilon}\right)^d$$

$$-\left[\frac{2}{(A2^{3-q}/(q+3))^{\frac{2}{q-1}}(1-e^{-\frac{q-1}{4}})^{\frac{4}{q-1}}}\right] = -200.02 < 0。$$

参考文献

[1] J. Greenberg. On the existence, uniqueness and stability of the equation $\rho X_{xxt} = E(X_x)X_{xx} + X_{xxt}$ [J]. Math. Anal. Appl., 1969, 25: 575-591.

[2] N. D. Alikakos and R. Rostamian. Gradient estimates for degenerate diffusion equations[J]. Math. Ann., 1982, 259: 53-70.

[3] H. Engler. Gradient estimates for solutions of parabolic equations and systems[J]. J. Math. Anal. Appl., 1980, 47: 309-329.

[4] S. Kawashima and Y. Shibata. Global existence and exponential stability of small solutions to nonlinear viscoelasticity[J]. Comm. Math. Phys., 1992, 148: 189-208.

[5] K. Mizohata and S. Ukai. The global existence, uniqueness of small amplitude solutions to the nonlinear acoustic wave equations [J]. J. Math. Kyoto Univ., 1993, 33: 505-522.

[6] M. Nakao. Energy decay for the quasilinear wave equation with viscosity[J]. Math. Z, 1995, 219: 289-299.

[7] M. Nakao. Existence of an anti-periodic solution for the quasilinear wave equation with viscosity[J]. J. Math. Anal. Appl., 1996, 204: 754-764.

[8] M. Nakao. On strong solutions of the quasilinear wave equation with viscosity [J]. Adv. Math. Sci. Appl., 1996, 6:

267 – 278.

[9] H. A. Levine. Instability and nonexistence of global solutions to nonlinear wave equations of the form $\rho X_{xxt} = E(X_x)X_{xx} + X_{xxt}$ [J]. Trans, Amer. Math. Soc., 1974, 192: 1 – 21.

[10] H. A. Levine. Some additional remarks on the nonexistence of global solutions to nonlinear wave equation[J]. SIAM. J. Math Anal., 1974, 5: 138 – 146.

[11] J. M. Ball. Finite time blow – up in nonlinear problems, Nonlinear evolution equations[M]. Proc. Symp., Madison/Wis., 1978: 189 – 205.

[12] R. T. Glassey. Blow – up theorems for nonlinear wave equations[J]. Math. Z , 1973, 132: 183 – 203.

[13] H. A. Levine, P. pucci and J. serrin. Some remarks on global nonexistence for nonautonomous abstract evolution equations, Harmonic Analysis and Nonlinear Differential Equations(M. L. Lapidus, L. H. Harper and A. J. Rumbos, eds.). Contemp. Math., 208, American Mathmatical society, 1997: 253 – 263.

[14] A. Haraux and E. Zuazua. Decay estimates for some semilinear damped hyperbolic problems[J]. Arch. Rational Mech. Anal., 1988, 100:191 – 206.

[15] M. Kopackova. Remarks on bounded solutions of a semilinear dissipative hyperbolic equation[J]. Comment. Univ. Carolin , 1989, 30: 713 – 719.

[16] V. Georgiev, G. Todorova. Existence of a solution of the wave equation with nonlinear damping and source terms[J]. J. Diff. Eq., 1994, 109:295 – 308.

[17] H. Levine and J. Serrin. Global nonexistence theorems for quasilinear evolution equations with dissipation[J]. Arch. Rational Mech. Anal., 1997, 137: 341 – 361.

[18] S. A. Messaoudi. Blow up in a nonlinearly damped wave equation[J]. Mathematische Nachrichten, 2001, 231: 1 -7.
[19] H. A. Levine, S. Park and J. Serrin. Global existence of global nonexistence of solutions of the Cauchy problem for a nonlinearly damped wave equation[J]. J. Math. Anal. Appl., 1998, 228: 181 -205.
[20] G. Todorova. Cauchy problem for a nonlinear wave equation with nonlinear damping and source terms[J]. Nonlinear Anal., 2000, 41: 891 -905.
[21] E. Vitiliaro. Global nonexistence theorems for a class of evolution equations with dissipation[J]. Arch. Rational. Mech. Anal., 1999, 149:155 -182.
[22] J. Y. Park and J. J. Bae. On the existence of solutions of quasilinear wave equations with viscosity [J]. J. Korean Math. Soc., 2000, 37(3): 339 -358.
[23] R. A. Adams. Sobolev Spaces [M]. Academic Press, New York, San Francisco, London:1975.
[24] J. L. Lions. "Queques m\'ethods de r\'esoution des probl\'ems aux limites non lin\'eaires" [M]. Paris: Dunod Gauthier - Villars, 1969.
[25] Li Yuesheng. Basic inequality and uniqueness of the solution for differential equation (I) [J]. Acta. Sci. Natur. Univ. Jilin, 1960, 1:7 -22.

第三章　一类广义立方双耗散方程的初边值问题

第一节　引言

在这一章中，考虑如下的初边值问题。

$$u_{tt} - u_{xx} - au_{xxtt} + bu_{x^4} - du_{xxt} = f(u)_{xx},\ x \in \Omega,\ t > 0 \tag{3.1.1}$$

$$u(0,\ t) = u(\ell,\ t) = 0,\ u_{xx}(0,\ t) = u_{xx}(\ell,\ t) = 0,\ t \geqslant 0 \tag{3.1.2}$$

$$u(x,\ 0) = u_0(x),\ u_t(x,\ 0) = u_1(x),\ x \in \overline{\Omega} \tag{3.1.3}$$

其中 $u(x,\ t)$ 表示未知函数，$u_{x^4} = u_{xxxx}$，$f(s)$ 是给定的非线性 γ 函数，$\Omega = (0,\ \ell)$，$a > 0$，$b > 0$ 和 d 都是常数，$u_0(x)$ 和 $u_1(x)$ 是已知的函数并且满足边界条件(1.2)。

模型方程(3.1.1)出现在许多物理问题的研究中，有明显的物理背景。比如，在对波导管中非线性波传播问题的研究中，由于波导管和外部介质的相互作用，通过波导管外表面的能量交换是不能忽略的。如果考虑到非线性弹性杆(由超弹性材料制成的，比如 Murnaghan 材料)的表面与介质之间的相互作用[1]，利用 Hamilton 原理可以得到杆的纵向位移 $u(x,\ t)$ 满足下面的双耗散方程(DDE)[2,3]。

$$u_{tt} - u_{xx} = \frac{1}{4}(6u^2 + au_{tt} - bu_{xx})_{xx} \tag{3.1.4}$$

同样，可以得到下述的立方双耗散方程(CDDE)[2,3]

$$u_{tt} - u_{xx} = \frac{1}{4}(cu^3 + 6u^2 + au_{tt} - bu_{xx} + du_t)_{xx} \tag{3.1.5}$$

其中 $u(x, t)$ 与应变 $\frac{\partial v}{\partial x}$ 成比例，这里 $v(x, t)$ 表示横向位移，$a > 0$，$b > 0$，$c > 0$ 和 $d \neq 0$ 是物理常数，这些常数依赖于 Young 模数、扭转模数 μ、波导管密度 ρ 以及 Poisson 系数。显然，如果 $f(u) = \frac{c}{4}u^3 + \frac{3}{2}u^2$，并且 a，b，d 分别用 $\frac{a}{4}$，$\frac{b}{4}$ 和 $\frac{d}{4}$ 代替后，方程(3.1.1)就成方程(3.1.5). 如果 $f(u) = \frac{3}{2}u^2$，并且 a 和 b 分别用 $\frac{a}{4}$ 和 $\frac{b}{4}$ 替代后，方程(3.1.1)就变成方程(3.1.4)。

在对层流体中压缩物质物理波的研究中，导出了下述方程[4]：

$$u_{tt} - u_{xx} = (cu^3 + du^2 - bu_{xx})_{xx} + (fu)_{xt} + gu_{xxt} \quad (3.1.6)$$

对一维非线性弹性固体的波导管中波的传播问题，可由双耗散方程(DDE)来描述：

$$u_{tt} - u_{xx} = \varepsilon(cu^2 + au_{tt} - bu_{xx} + gu_t)_{xx} + O(\varepsilon^2) \quad (3.1.7)$$

其中 $u(x, t)$ 是纵向应变，a，b，$c > 0$，f，$g \neq 0$ 和 $\varepsilon \leq 1$ 都是常数。

在文献[6]中，在无旋运动中由表面波的 Euler 方程[7]得到了如下的 Boussinesq 型方程

$$\Phi_{tt} - \Phi_{xx} - \frac{\varepsilon}{2}\Phi_{xxtt} + \frac{\varepsilon}{6}\Phi_{x^4} - 3\varepsilon\Phi_x\Phi_{xx} = 0$$

如果令 $\Phi_x = u$，则 u 满足方程

$$u_{tt} - u_{xx} - \frac{\varepsilon}{2}u_{xxtt} + \frac{\varepsilon}{6}u_{x^4} - \frac{3\varepsilon}{2}(u^2)_{xx} = 0 \quad (3.1.8)$$

如果在(3.1.7)中略去项 $O(\varepsilon^2)$ 并在(3.1.8)中取 $\varepsilon = 1$，则方程(3.1.7)和(3.1.8)都是方程(3.1.1)的特殊情形。

在文献[8]中，用拟连续 Cosserat 模型及 Le Rouz 连续模型讨论柱形弹性杆内部的非线性纵向应变孤立子波时，提出了控制这

个过程的 Boussinesq 型方程，即双耗散方程

$$u_{tt}-\alpha_1 u_{xx}-\alpha_2(u^2)_{xx}+\alpha_3 u_{xxtt}-\alpha_4 u_{xxxx}=0 \quad (3.1.9)$$

其中系数 $\alpha_i(i=1,2,3,4)$ 依赖于杆材料的弹性参数。如果 $\alpha_1>0$，$\alpha_2>0$，$\alpha_3<0$ 和 $\alpha_4<0$，则模型方程(3.1.9)也是方程(3.1.1)的特殊情形。

还有一些具有主项 $u_{tt}-u_{xxtt}$ 的方程，与方程(3.1.1)密切相关。例如，1872 年由 J. Boussinesq 提出的(人们称之为 Bq 方程)

$$u_{tt}-u_{xx}-u_{xxxx}=(u^2)_{xx}$$

另一方面，改进的 Bq 方程(人们称之为 IBq 方程)是

$$u_{tt}-u_{xx}-u_{xxtt}=(u^2)_{xx} \quad (3.1.10)$$

它的修正形式[9]是

$$u_{tt}-u_{xx}-u_{xxtt}=(u^3)_{xx} \quad (3.1.11)$$

称其为 IMBq 方程。

文献[2, 3, 5]研究了方程(3.1.4)的应变解，文献[10, 11, 12]研究了方程(3.1.4)和(3.1.5)的行波解。文献[3, 11]中得到了方程(3.1.7)和(3.1.8)的精确行波解，文献[8]的作者则给出了方程(3.1.9)的孤立子波解。

在文献[13]中，作者证明了方程(3.1.11)的初边值问题存在唯一的整体广义解和唯一的整体古典解。文献[13]证明的基本步骤如下：首先利用一个二阶常微分方程的边值问题的 Green 函数，把方程(3.1.11)的初边值问题转化为与之等价的积分方程，然后利用压缩映射原理证明积分方程的局部广义解及局部古典解的存在唯一性，最后通过使用解的延拓定理把解延拓到整个区间 $[0,T]$。

文献[13]还给出了方程(3.1.10)的初边值问题的整体解不存在的充分条件。然而无论是利用 Green 函数把问题转化为等价的积分方程还是直接使用 Galerkin 方法，讨论问题(3.1.1)－(3.1.3)都有一定的困难。为了克服这个困难，我们首先引入变换 $u=v_x$，把问题进行转化，进而得到问题(3.1.1)－(3.1.3)整

体广义解和整体古典解的存在性及唯一性。

此外，为了研究问题解的爆破，本文通过建立一个微分不等式，证明了问题的解在有限时刻发生爆破。

最后，把对问题(3.1.1)－(3.1.3)的研究结果应用于问题(3.1.5)，(3.1.2)，(3.1.3)和(3.1.4)，(3.1.2)，(3.1.3)，证明问题(3.1.5)，(3.1.2)，(3.1.3)的整体广义解的存在唯一性以及问题(3.1.4)，(3.1.2)，(3.1.3)整体广义解与整体古典解的不存在性。

为了得到问题(3.1.1)－(3.1.3)的整体广义解和整体古典解，将考虑下面的辅助问题。

$$v_{tt} - v_{xx} - av_{xxtt} + bv_{x^4} - dv_{xxt} = f(v_x)_x,\ x \in \Omega,\ t > 0 \tag{3.1.12}$$

$$v_x(0, t) = v_x(\ell, t) = 0,\ v_{xxx}(0, t) = v_{xxx}(\ell, t) = 0,\ t \geqslant 0 \tag{3.1.13}$$

$$v(x, 0) = \varphi(x),\ v_t(x, 0) = \psi(x),\ x \in \bar{\Omega} \tag{3.1.14}$$

首先证明问题(3.1.12)－(3.1.14)存在光滑的整体古典解，然后置变换 $v_x(x, t) = u(x, t)$，$\varphi_x(x) = u_0(x)$，$\psi_x(x) = u_1(x)$ 就得到了问题(3.1.1)－(3.1.3)的整体广义解和整体古典解的存在性。

本章内容安排如下：第二节证明问题(3.1.12)－(3.1.14)的整体广义解和整体古典解的存在性与唯一性；第三节证明问题(3.1.1)－(3.1.3)的整体广义解和整体古典解的存在性与唯一性；第四节讨论问题(3.1.1)－(3.1.3)的整体解的不存在性；第五节研究问题(3.1.4)，(3.1.2)，(3.1.3)和(3.1.5)，(3.1.2)，(3.1.3)。

第二节 问题(3.1.12)－(3.1.14)的整体解

设 $\{y_s(x)\}$ 是 $L^2(\Omega)$ 中的标准正交基，由特征值问题

$$y'' + \lambda y = 0,\ x \in \Omega,\ y'(0) = y'(\ell) = 0$$

相应于特征值 $\lambda_i(i = 1, 2, \cdots)$ 的特征函数构成。其中"$'$"表示对 x 的导数。设 $v_N(x, t) = \sum_{i=1}^{N} \alpha_{Ni}(t) y_i(x)$ 是问题(3.1.12) - (3.1.14) 的 Galerkin 近似解，其中 $\alpha_{Ni}(t)(i = 1, 2, \cdots, N)$ 是待定的函数，N 是自然数。假定初值 $\varphi(x)$ 和 $\psi(x)$ 能分别展开成如下形式。

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \beta_i y_i(x),\ \psi(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \gamma_i y_i(x)$$

其中 β_i, $\gamma_i(i = 1, 2, \cdots)$ 是常数，把近似解 $v_N(x, t)$ 代入(3.1.12) - (3.1.14)，则 $v_N(x, t)$ 满足下述问题。

$$v_{Ntt} - v_{Nxx} - a v_{Nxxtt} + b v_{Nx^4} - d v_{Nxxt} = f(v_{Nx})_x \tag{3.2.1}$$

$$v_{Nx}(0, t) = v_{Nx}(\ell, t) = 0,\ v_{Nx^3}(0, t) = v_{Nx^3}(\ell, t) = 0 \tag{3.2.2}$$

$$v_N(x, 0) = \varphi_N(x),\ v_{Nt}(x, 0) = \psi_N(x) \tag{3.2.3}$$

其中 $\varphi_N(x, t) = \sum_{i=1}^{N} \beta_i y_i(x)$, $\psi_N(x) = \sum_{i=1}^{N} \gamma_i y_i(x)$

方程(3.2.1)及(3.2.3)的两端分别乘以 $y_s(x)$，并在 Ω 上积分，得到

$$(v_{Ntt} - v_{Nxx} - a v_{Nxxtt} + b v_{Nx^4} - d v_{Nxxt},\ y_s) = (f(v_{Nx})_x,\ y_s) \tag{3.2.4}$$

$$\alpha_{Ns}(0) = \beta_s,\ \alpha_{Nst}(0) = \gamma_s,\ s = 1, 2, \cdots, N \tag{3.2.5}$$

其中 $(\cdot, \cdot)$ 表示 $L^2(\Omega)$ 中的内积。

引理 3.2.1 假定 $f \in C^1(R)$，并且存在常数 C_0 使得对任意 $s \in R$，有 $f'(s) \geqslant C_0$. $\varphi \in H^2(\Omega)$, $\psi \in H^1(\Omega)$ 且满足条件(3.1.13)。则对 $\forall N$, Cauchy 问题(3.2.4), (3.2.5)存在整体古典解 $\alpha_{Ns} \in C^2[0, T](s = 1, 2, \cdots, N)$。同时，成立下述估计式

$$\|v_N(\cdot, t)\|^2_{H^2(\Omega)} + \|v_{Nt}(\cdot, t)\|^2_{H^1(\Omega)} \leqslant C_1(T),\ t \in [0, T] \tag{3.2.6}$$

这里及下面的 $C_1(T)$ 与 $C_i(T)(i=1,2,\cdots)$ 是仅依赖于 T 而与 N 无关的常数。

证明 令 $f_0(s)=f(s)-\delta s-f(0)$，其中 $\delta=\min\{C_0,0\}$ $(\leqslant 0)$，则 $f_0(0)=0$ 和 $f'_0(s)=f'(s)-\delta\geqslant 0$。

因此 $f_0(s)$ 是单调增的函数，则 $F(s)=\int_0^s f_0(\tau)\mathrm{d}\tau\geqslant 0$。显然方程(3.1.12)等价于如下方程：

$$v_{tt}-v_{xx}-av_{xxtt}+bv_{x^4}-dv_{xxt}-\delta v_{xx}=f_0(v_x)_x \quad (3.2.7)$$

因而，方程组(3.2.4)与下面的方程组等价。

$$(v_{Ntt}-v_{Nxx}-av_{Nxxtt}+bv_{Nx^4}-dv_{Nxxt}-\delta v_{Nxx},\ y_s)$$
$$=(f_0(v_{Nx})_x,\ y_s),\ s=1,2,\cdots,N \quad (3.2.8)$$

方程(3.2.8)两端同乘以 $2\alpha_{Nst}(t)$，并对 $s=1,2,\cdots,N$ 求和，两端同时加上 $2(v_N,v_{Nt})$，通过分部积分，利用 Gronwall 不等式，有

$$\|v_N(\cdot,t)\|^2_{H^2(\Omega)}+\|v_{Nt}(\cdot,t)\|^2_{H^1(\Omega)}$$
$$\leqslant e^{C_2(|\delta|+2|d|+1)T}\Big(\|\varphi\|^2_{H^2(\Omega)}+\|\psi\|^2_{H^1(\Omega)}$$
$$+2\int_\Omega F(\varphi_x(x))\mathrm{d}x+1\Big),\ t\in[0,T] \quad (3.2.9)$$

由(3.2.9)式知(3.2.6)式成立。

与文献[14]的方法相同，利用(3.2.9)式和 Leray - Schauder 不动点定理[15]知道，Cauchy 问题(3.2.4)，(3.2.5)存在解 $\alpha_{Ns}\in C^2[0,T](s=1,2,\cdots,N)$。

证毕。

引理 3.2.2 假定引理 3.2.1 的条件成立。如果 $f\in C^3(R)$，$\varphi\in H^5(\Omega)$，$\psi\in H^4(\Omega)$，则问题(3.1.12) - (3.1.14)的近似解满足估计式

$$\|v_N\|^2_{H^5(\Omega)}+\|v_{Nt}\|^2_{H^4(\Omega)}+\|v_{Ntt}\|^2_{H^3(\Omega)}\leqslant C_2(T),\ 0\leqslant t\leqslant T \quad (3.2.10)$$

证明 (3.2.4)两端乘以 $2\lambda_s^2\alpha_{Nst}$，并对 $s=1,2,\cdots,N$ 求和，通过关于 x 的分部积分，利用(3.2.6)式，并注意到空间 $H^2(\Omega)$

连续地嵌入 $C^1(\bar{\Omega})$，得到

$$\frac{d}{dt}(\|v_{Nxxt}\|^2+\|v_{Nx^3}\|^3+a\|v_{Nx^3t}\|^2+b\|v_{Nx^4}\|^2)$$
$$\leqslant C_3(T)(\|v_{Nxx}\|^2_{L^4(\Omega)}+\|v_{Nx^3}\|^2)$$
$$+2(|d|+1)\|v_{Nx^3t}\|^2 \tag{3.2.11}$$

其中 $\|\cdot\|$ 表示 $L^2(\Omega)$ 中的范数。利用 Gagliardo – Nirenberg 内插定理，Young 不等式和 Gronwall 不等式，得到

$$\|v_{Nxxt}\|^2+\|v_{Nx^3}\|^2+\|v_{Nx^3t}\|^2+\|v_{Nx^4}\|^2$$
$$\leqslant C_4(T)(\|\varphi\|^2_{H^4(\Omega)}+\|\psi\|^2_{H^3(\Omega)}+1),\ t\in[0,T] \tag{3.2.12}$$

同样地，(3.2.4)两端同乘以 $-2\lambda_s^3\alpha_{Nst}$，并对 $s=1,2,\cdots,N$ 求和，然后关于 t 积分，得到

$$\|v_{Nx^3t}\|^2+\|v_{Nx^4}\|^2+a\|v_{Nx^4t}\|^2+b\|v_{Nx^5}\|^2$$
$$\leqslant 2|d|\int_0^t\|v_{Nx^4\tau}\|^2\mathrm{d}\tau-2\int_0^t f''(0)v_{Nxx}^2(\ell,\tau)v_{Nx^4\tau}(\ell,\tau)\mathrm{d}\tau$$
$$+2\int_0^t f''(0)v_{Nxx}^2(0,\tau)v_{Nx^4\tau}(0,\tau)\mathrm{d}\tau$$
$$+2\int_0^t\int_\Omega(f''(v_{Nx})v_{Nxx}^3+3f''(v_{Nx})v_{Nxx}v_{Nx^3}$$
$$+f'(v_{Nx})v_{Nx^4})v_{Nx^4\tau}\mathrm{d}x\mathrm{d}\tau+\|\psi_{x^3}\|^2$$
$$+\|\varphi_{x^4}\|^2+a\|\psi_{x^4}\|^2+b\|\varphi_{x^5}\|^2 \tag{3.2.13}$$

利用分部积分及 Sobolev 嵌入定理，并注意到(3.2.6)和(3.2.12)式，可得

$$-2\int_0^t f''(0)v_{Nxx}^2(\ell,\tau)v_{Nx^4\tau}(\ell,\tau)\mathrm{d}\tau$$
$$=-2f''(0)[v_{Nxx}^2(\ell,t)v_{Nx^4}(\ell,t)-v_{Nxx}^2(\ell,0)v_{Nx^4}(\ell,0)]$$
$$+2f''(0)\int_0^t(v_{Nxx}^2(\ell,\tau))_\tau v_{Nx^4}(\ell,\tau)\mathrm{d}\tau$$
$$\leqslant 2|f''(0)|\{\sup_{0\leqslant t\leqslant T}(\|v_{Nxx}(\cdot,t)\|^2_{C(\bar{\Omega})})\|v_{Nx^4}(\cdot,t)\|_{C(\bar{\Omega})}$$

$$+ \|\varphi_{xx}\|_{C(\bar{\Omega})}^{2} \|\varphi_{x^4}\|_{C(\bar{\Omega})} + 4\int_0^t \|v_{Nxx}(\cdot,\tau)\|_{C(\bar{\Omega})}$$

$$\|v_{Nxx\tau}(\cdot,\tau)\|_{C(\bar{\Omega})} \|v_{Nx^4}(\cdot,\tau)\|_{C(\bar{\Omega})}\mathrm{d}\tau \Big\}$$

$$\leqslant C_5(T) + C_6\|\varphi\|_{H^3(\Omega)}\|\varphi\|_{H^5(\Omega)} + \frac{b}{4}\|v_{Nx^5}(\cdot,t)\|$$

$$+ \int_0^t \|v_{Nx^5}(\cdot,\tau)\|^2\mathrm{d}\tau \tag{3.2.14}$$

其中 $\|\cdot\|_{C(\bar{\Omega})}$ 表示空间 $C(\bar{\Omega})$ 的范数。

类似于(3.2.14)式可以证明

$$2\int_0^t f''(0)v_{Nxx}^2(0,\tau)v_{Nx^4\tau}(0,\tau)\mathrm{d}\tau$$

$$\leqslant C_7(T) + C_8\|\varphi\|_{H^3(\Omega)}^2\|\varphi\|_{H^5(\Omega)} + \frac{b}{4}\|v_{Nx^5}(\cdot,\tau)\|^2$$

$$+ \int_0^t \|v_{Nx^5}(\cdot,\tau)\|^2\mathrm{d}\tau \tag{3.2.15}$$

由 Sobolev 嵌入定理，并利用(3.2.6)式和(3.2.12)式，可以得到

$$2\int_0^t\int_\Omega (f'''(v_{Nx})v_{Nxx}^3 + 3f''(v_{Nx})v_{Nxx}v_{Nx^3} + f'(v_{Nx})v_{Nx^4})v_{Nx^4t}\mathrm{d}x\mathrm{d}\tau$$

$$\leqslant C_9(T) + \int_0^t \|v_{Nx^4\tau}\|^2\mathrm{d}\tau \tag{3.2.16}$$

把(3.2.14) - (3.2.16)代入(3.2.13)，并利用 Gronwall 不等式，得

$$\|v_{Nx^3t}\|^2 + \|v_{Nx^4}\|^2 + \|v_{Nx^4t}\|^2 + \|v_{Nx^5}\|^2$$

$$\leqslant C_{10}(T),\ t\in[0,T] \tag{3.2.17}$$

(3.2.4)两端同乘以 $\alpha_{Nstt}(t) + \lambda_s^2\alpha_{Nstt}(t)$，并对 $s = 1, 2, \cdots, N$ 求和，利用 Cauchy 不等式，估计式(3.2.6)，(3.2.17)以及 Sobolev 嵌入定理，得到

$$\|v_{Ntt}\|_{H^3(\Omega)}^2 \leqslant C_{11}(T),\ 0\leqslant t\leqslant T \tag{3.2.18}$$

引理证毕。

定理 3.2.1 假定引理 3.2.2 的条件成立，问题(3.1.12) -

(3.1.14)有唯一的整体广义解

$$v \in C([0,T];H^5(\Omega)) \cap C^1([0,T];H^4(\Omega)) \cap C^2([0,T];H^3(\Omega)) = A \quad (3.2.19)$$

证明 由(3.2.10)式，利用 Sobolev 嵌入定理和紧致性原理知道，问题(3.1.12)-(3.1.14)存在整体广义解 $v \in A$. 解的唯一性是显然的。引理证毕。

引理3.2.3 假定引理3.2.2 的条件成立。如果 $\varphi \in H^7(\Omega)$, $\psi \in H^6(\Omega)$, $f \in C^4(R)$, 且 $f^{(i)}(0) = 0(i = 2, 4)$, 则问题(3.1.12)-(3.1.14)的近似解满足估计式

$$\|v_N\|_{H^7(\Omega)}^2 + \|v_{Nt}\|_{H^6(\Omega)}^2 + \|v_{Ntt}\|_{H^5(\Omega)}^2 + \|v_{Nt^3}\|_{H^4(\Omega)}^2 \leqslant C_{12}(T),\ t \in [0,T] \quad (3.2.20)$$

证明 (3.2.4)两端同乘以 $-2\lambda_s^5\alpha_{Ns}(t)$, 并对 $s = 1, 2, \cdots, N$ 求和，通过分部积分和利用 Gronwall 不等式，可得

$$\|v_{Nx^5t}\|^2 + \|v_{Nx^6}\|^2 + \|v_{Nx^6t}\|^2 + \|v_{Nx^7}\|^2 \leqslant C_{13}(T)(\|\varphi\|_{H^7(\Omega)}^2 + \|\psi\|_{H^6(\Omega)}^2 + 1),\ t \in [0,T] \quad (3.2.21)$$

同样地，(3.2.4)两端同乘以 $\lambda_s^4\alpha_{Nstt}(t)$, 可以得到

$$\begin{aligned}&\|v_{Nx^4tt}\|^2 + a\|v_{Nx^5tt}\|^2\\&= (-v_{Nx^5} + bv_{Nx^7} - dv_{Nx^5t} - f(v_{Nx})_{x^4}, v_{Nx^5tt})\\&\leqslant \frac{a}{4}\|v_{Nx^5tt}\|^2 + C_{14}(\|v_{Nx^5}\|^2 + \|v_{Nx^7}\|^2\\&\quad + \|v_{Nx^5t}\|^2 + \|f(v_{Nx})_{x^4}\|^2)\end{aligned} \quad (3.2.22)$$

由(3.2.10), (3.2.21)和(3.2.22)可以得到

$$\|v_{Nx^4tt}\|^2 + \|v_{Nx^5tt}\|^2 \leqslant C_{15}(T),\ t \in [0,T] \quad (3.2.23)$$

同样的方式可得

$$\|v_{Nx^3t^3}\|^2 + \|v_{Nx^4t^3}\|^2 \leqslant C_{16}(T),\ t \in [0,T] \quad (3.2.24)$$

由(3.2.6), (3.2.10), (3.2.21), (3.2.23)和(3.2.24)知，估

计式(3.2.20)成立。

引理证毕。

类似于引理 3.2.3 和定理 3.2.1 的证明过程，可证明如下定理：

定理 3.2.2 在引理 3.2.3 的条件下，问题(3.1.12) - (3.1.14)有唯一的整体古典解

$$v \in C([0, t]; C^5(\overline{\Omega})) \cap C^1([0, T]$$
$$C^4(\overline{\Omega})) \cap C^2([0, T]; C^3(\overline{\Omega})) = B$$

第三节 问题(3.1.1) - (3.1.3)的整体解

定理 3.3.1 $u_0 \in H^4(\Omega)$，$u_1 \in H^3(\Omega)$，$f \in C^3(R)$ 且 $f'(s)$ 是下有界的。则问题(3.1.1) - (3.1.3) 存在唯一的整体广义解

$$u \in C([0, T]; H^4(\Omega)) \cap C^1([0, T]$$
$$H^3(\Omega)) \cap C^2([0, T]; H^2(\Omega)) = D$$

证明 (3.2.1)式两端关于 x 求导，得

$$v_{Nxtt} - v_{Nx^3} - av_{Nx^3tt} + bv_{Nx^5} - dv_{Nx^3t} = f(v_{Nx})_{xx} \quad (3.3.1)$$

置

$$v_{Nx}(x, t) = u_N(x, t) \quad (3.3.2)$$

把(3.3.2)代入(3.3.1)，(3.2.2)和(3.2.3)，得到

$$u_{Ntt} - u_{Nxx} - au_{Nxxtt} + bu_{Nx^4} - du_{Nxxt} = f(u_N)_{xx} \quad (3.3.3)$$

$$u_N(0, t) = u_N(\ell, t) = 0, \ u_{Nxx}(0, t) = u_{Nxx}(\ell, t) = 0 \quad (3.3.4)$$

$$u_{tt} - u_{xx} - au_{xxtt} + bu_{x^4} - du_{xxt} = f(u_1)_{xx} - f(u_2)_{xx}, \ x \in \Omega, \ t > 0$$

$$u_N(x, 0) = u_{0N}(x), \ u_{Nt}(x, 0) = u_{1N}(x) \quad (3.3.5)$$

其中在(3.3.5)式中，$u_{0N}(x) = \sum_{i=1}^{N} a_i y_i(x)$，$u_{1N}(x) = \sum_{i=1}^{N} b_i y_i(x)$ 分别是

$$u_0(x) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i y_i(x) \text{ 和 } u_1(x) = \sum_{i=1}^{\infty} b_i y_i(x)$$

的近似，a_i，b_i 是常数。

由(3.3.2)和(3.2.10)知道：

$$\| u_N \|_{H^4(\Omega)} + \| u_{Nt} \|_{H^3(\Omega)} + \| u_{Ntt} \|_{H^2(\Omega)} \leqslant C_{17}(T),\ t \in [0, T]. \tag{3.3.6}$$

利用(3.3.6)和 Sobolev 空间嵌入定理，可得

$$\| u_N \|_{C^{3,\lambda}(\overline{\Omega})} + \| u_{Nt} \|_{C^{2,\lambda}(\overline{\Omega})} + \| u_{Ntt} \|_{C^{1,\lambda}(\overline{\Omega})} \leqslant C_{18}(T),\ t \in [0, T], \tag{3.3.7}$$

其中 $0 < \lambda \leqslant \frac{1}{2}$。由(3.3.7)式和 Ascoli – Arzelà 定理知，存在函数 $u(x,t)$ 以及 $\{u_N(x,t)\}$ 的一个子序列(还记为) $\{u_N(x,t)\}$ 满足当 $N \to \infty$ 时，$\{u_{Nx^i}(x,t)\}(i=0,1,2)$ 和 $\{u_N(x,t)\}(i=0,1)$ 分别在 $\overline{Q}_T$ 上一致地收敛到 $u_{x^i}(x,t)(i=0,1,2)$ 和 $u_{x^it}(x,t)(i=0,1)$；子序列 $\{u_{Nx^i}(x,t)\}(i=0,1,2,3,4)$，$\{u_{Nx^it}(x,t)(i=0,1,2,3)$ 和 $\{u_{Nx^itt}(x,t)\}(i=0,1,2)$ 分别在 $L^2(Q_T)$ 中弱收敛于 $u_{x^i}(x,t)(i=0,1,2,3,4)$，$u_{x^it}(x,t)(i=0,1,2,3)$ 和 $u_{x^itt}(x,t)(i=0,1,2)$。因此初边值问题(3.1.1) – (3.1.3) 有广义解 $u \in D$。

下证问题(3.1.1) – (3.1.3)解的唯一性。

设 $u_1(x,t)$ 和 $u_2(x,t)$ 是问题(3.1.1) – (3.1.3) 的两个广义解，$u(x,t) = u_1(x,t) - u_2(x,t)$ 满足下述初边值问题

$$u_{tt} - u_{xx} - au_{xxtt} + bu_{x^4} - du_{xxt} = f(u_1)_{xx} - f(u_2)_{xx}, x \in \Omega, t > 0, \tag{3.3.8}$$

$$u(0,t) = u(\ell,t) = 0,\ u_{xx}(0,t) = u_{xx}(\ell,t) = 0, t \geqslant 0, \tag{3.3.9}$$

$$u(x,0) = 0, u_t(x,0) = 0, x \in \Omega. \tag{3.3.10}$$

(3.3.8)的两端同乘以 $2u_t$，并在 Ω 上积分，方程的两端分别加上 $2\int_{\Omega} uu_t \mathrm{d}x$，通过分部积分可得

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}(\|u\|^2+\|u_t\|^2+\|u_x\|^2+a\|u_{xt}\|^2+b\|u_{xx}\|^2)\\
&=-2d\|u_{xt}\|^2-2\int_\Omega\{f''(u_1+\theta(u_2-u_1))uu_{1x}\\
&\quad+f'(u_2)u_x\}u_{xt}\mathrm{d}x+2\int_\Omega uu_t\mathrm{d}x\\
&\leqslant 2\left|d\right|\|u_{xt}\|^2+2\max_{0\leqslant t\leqslant T,\,x\in\Omega}\left|f''(u_1\right.\\
&\quad\left.+\theta(u_2-u_1))u_{1x}\right|\int_\Omega\left|u\right|\left|u_{xt}\right|\mathrm{d}x\\
&\quad+2\max_{0\leqslant t\leqslant T,\,x\in\Omega}\left|f'(u_2)\right|\int_\Omega\left|u_x\right|\left|u_{xt}\right|\mathrm{d}x\\
&\quad+(\|u\|^2+\|u_t\|^2)\leqslant C_{19}(T)(\|u\|^2+\|u_t\|^2\\
&\quad+\|u_x\|^2+\|u_{xt}\|^2).
\end{aligned}
\tag{3.3.11}
$$

利用 Gronwall 不等式，由(3.3.11)知

$$\|u\|^2+\|u_t\|^2+\|u_x\|^2+\|u_{xt}\|^2+\|u_{xx}\|^2=0.$$

因此，问题(3.1.1)－(3.1.3)的广义解是唯一的。定理证毕。

定理 3.3.2　假定 $u_0\in H^6(\Omega)$，$u_1\in H^5(\Omega)$，$f\in C^4(R)$，$f^{(i)}(0)=0(i=2,4)$ 且 $f'(s)$ 是下有界的。则问题(3.1.1)－(3.1.3)有唯一的整体古典解。

证明　利用定理3.2.2知，$v(x,t)\in B$ 满足方程(3.1.12)和初边值条件(3.1.3)与(3.1.14)。方程(3.1.12)两端对 x 求导并作代换 $v_x(x,t)=u(x,t)$，可以看到函数 $u(x,t)$ 是问题(3.1.1)－(3.1.3)的整体广义解。

古典解的唯一性是显然的。定理得证。

第四节　问题(3.1.1)－(3.1.3)整体解的不存在性

定理 3.4.1　设 $u(x,t)$ 是问题(3.1.1)－(3.1.3)的广义解或古典解。假设下面的条件满足：

(1) $-\frac{\pi}{2\ell}\int_{\Omega}u_0(x)\sin\frac{\pi x}{\ell}\mathrm{d}x=\alpha>0$，$-\frac{\pi}{2\ell}\int_{\Omega}u_1(x)\sin\frac{\pi x}{\ell}\mathrm{d}x=\beta>0$；

(2) $f(s)\in C^2(R)$ 是偶函数并且是凸函数，$f(0)=0$，$f(\alpha)-\frac{\ell^2+b\pi^2}{\ell^2}\alpha\geqslant 0$；

(3) 当 $s\to\infty$ 时，$f(s)$ 增长得足够快，使得当 $d>0$ 时，积分

$$B=\frac{d\pi^2}{\ell^2+a\pi^2}\int_{\alpha}^{\infty}[\beta^2+\frac{2\pi^2}{\ell^2+a\pi^2}\int_{\alpha}^{y}(f(s)-\frac{\ell^2+b\pi^2}{\ell^2}s)\mathrm{d}s]^{-\frac{1}{2}}dy \tag{3.4.1}$$

收敛，并且 $B<1$；当 $d\leqslant 0$ 时，积分

$$\overline{T}_2=\int_{\alpha}^{\infty}[\beta^2+\frac{2\pi^2}{\ell^2+a\pi^2}(\int_{\alpha}^{y}f(s)\mathrm{d}s-\frac{\ell^2+b\pi^2}{2\ell^2}y^2)+\frac{\pi^2(\ell^2+b\pi^2)}{\ell^2(\ell^2+a\pi^2)}\alpha^2]^{-\frac{1}{2}}dy \tag{3.4.2}$$

收敛。

则当 $d>0$ 时，存在有限时刻 $t_0\leqslant\overline{T}_1=-\frac{\ell^2+a\pi^2}{d\pi^2}ln(1-B)$，有

$$\lim_{t\to t_0^-}\sup_{x\in\Omega}\left|u(x,t)\right|=\infty. \tag{3.4.3}$$

当 $d\leqslant 0$ 时，存在有限时刻 $t_0\leqslant\overline{T}_2$，有

$$\lim_{t\to t_0^-}\sup_{x\in\Omega}\left|u(x,t)\right|=\infty. \tag{3.4.4}$$

证明 令

$$\Phi(t)=-\frac{\pi}{2\ell}\int_{\Omega}u(x)\sin\frac{\pi x}{\ell}\mathrm{d}x。$$

方程(3.1.1)两端同乘以 $\frac{\pi}{2\ell}\sin\frac{\pi x}{\ell}$，利用分部积分，可得

$$(1+\frac{a\pi^2}{\ell^2})\ddot{\Phi}+(\frac{\pi^2}{\ell^2}+\frac{b\pi^4}{\ell^4})\Phi+\frac{d\pi^2}{\ell^2}\dot{\Phi}=-\frac{\pi}{2\ell}\int_{\Omega}f(u)_{xx}\sin\frac{\pi x}{\ell}\mathrm{d}x. \tag{3.4.5}$$

由于$f(s)$是偶凸函数，利用分部积分和 Jensen 不等式，有

$$-\frac{\pi}{2\ell}\int_\Omega f(u)_{xx}\sin\frac{\pi x}{\ell}\mathrm{d}x = \frac{\pi^3}{2\ell^3}\int_\Omega f(u)\sin\frac{\pi x}{\ell}\mathrm{d}x$$
$$\geqslant \frac{\pi^2}{\ell^2}f\left(-\frac{\pi}{2\ell}\int_\Omega u\sin\frac{\pi x}{\ell}\mathrm{d}x\right) = \frac{\pi^2}{\ell^2}f(\Phi). \tag{3.4.6}$$

把(3.4.6)式代入(3.4.5)，可得

$$\ddot{\Phi} + \frac{d\pi^2}{\ell^2 + a\pi^2}\dot{\Phi} + \frac{\pi^2(\ell^2 + b\pi^2)}{\ell^2(\ell^2 + a\pi^2)}\Phi \geqslant \frac{\pi^2}{\ell^2 + a\pi^2}f(\Phi), \tag{3.4.7}$$

且$\Phi(0) = \alpha > 0$，$\dot{\Phi}(0) = \beta > 0$.

为了证明对$\forall t > 0$，有$\Phi(t) > 0$，首先表明对$\forall s \geqslant \alpha$，$f(s) - \frac{\ell^2 + b\pi^2}{\ell^2}s \geqslant 0$。事实上，由于 MYM$f \in C^2(R)$且是偶凸函数，因而$f''(s) \geqslant 0$，$f'(0) = 0$. 记$F(s) = f(s) - \frac{\ell^2 + b\pi^2}{\ell^2}s$，则$F''(s) = f''(s) \geqslant 0$。因此$F'(s)$是单增函数。注意到

$$F(0) = f(0) = 0,\ F'(0) = f'(0) - \frac{\ell^2 + b\pi^2}{\ell^2} = -\frac{\ell^2 + b\pi^2}{\ell^2} < 0$$

以及

$$F(\alpha) = f(\alpha) - \frac{\ell^2 + b\pi^2}{\ell^2}\alpha \geqslant 0,$$

我们知道，存在$s_0 \in (0, \alpha)$，使得$F'(s_0) = 0$且$F(s)$在s_0处取得最小值。由于$F'(s)$的单调递增性质，对$\forall s \geqslant s_0$，有$F'(s) \geqslant F'(s_0) = 0$，即当$s \geqslant s_0$时，$F(s)$是单调增函数。特别地$F(s)$在$[\alpha, \infty)$是单调增的，且$F(s) \geqslant F(\alpha) \geqslant 0$。因而对$\forall s \geqslant \alpha$，都有

$$f(s) - \frac{\ell^2 + b\pi^2}{\ell^2}s \geqslant 0$$

接下来，证明对$\forall t > 0$，$\Phi(t) > 0$。采用反证法. 假设这个结论不正确，则存在$t_0 > 0$，使得当$0 < t < t_0$时，$\Phi(t) > 0$，但

$\Phi(t)=0$。

首先考虑 $d>0$ 的情形。(3.4.7) 的两端同乘以 $e^{\frac{d\pi^2}{\ell^2+a\pi^2}t}$ 并在 $(0,t)$ 上积分，可得

$$\int_0^t \frac{d}{\mathrm{d}\tau}(\dot{\Phi}e^{\frac{d\pi^2}{\ell^2+a\pi^2}\tau})\mathrm{d}\tau \geqslant \frac{\pi^2}{\ell^2+a\pi^2}\int_0^t [f(\Phi)-\frac{\ell^2+b\pi^2}{\ell^2}\Phi]e^{\frac{d\pi^2}{\ell^2+a\pi^2}\tau}\mathrm{d}\tau. \tag{3.4.8}$$

由(3.4.8)式得

$$\dot{\Phi}\geqslant e^{-\frac{d\pi^2}{\ell^2+a\pi^2}t}\left\{\beta^2+\frac{\pi^2}{\ell^2+a\pi^2}\int_0^t[f(\Phi)-\frac{\ell^2+b\pi^2}{\ell^2}\Phi]e^{\frac{d\pi^2}{\ell^2+a\pi^2}\tau}\mathrm{d}\tau\right\}>0,$$

$$t\in(0,t_0).$$

因而 $\Phi(t)$ 在 $[0,t_0)$ 上是严格单增的，且 $\Phi(t_0)>\Phi(0)=\alpha>0$，这与 $\Phi(t_0)=0$ 矛盾。因此，对 $\forall t>0$，$\Phi(t)>\Phi(0)>0$ 成立。

由上面的证明容易知道，当 $t>0$ 时，$\dot{\Phi}(t)>0$。因而，当 $t>0$ 时，(3.4.7) 的两端同乘以 $2e^{\frac{2d\pi^2}{\ell^2+a\pi^2}}\dot{\Phi}$ 并在 $(0,t)$ 上积分，注意到 $e^{\frac{2d\pi^2}{\ell^2+a\pi^2}t}>1$，可得

$$e^{\frac{2d\pi^2}{\ell^2+a\pi^2}}\dot{\Phi}^2\geqslant\beta^2+\frac{2\pi^2}{\ell^2+a\pi^2}\int_0^t e^{\frac{2d\pi^2}{\ell^2+a\pi^2}\tau}[f(\Phi)-\frac{\ell^2+b\pi^2}{\ell^2}\Phi]\,\dot{\Phi}d\tau$$

$$\geqslant\beta^2+\frac{2\pi^2}{\ell^2+a\pi^2}\int_{\Phi(0)}^{\Phi(t)}[f(s)-\frac{\ell^2+b\pi^2}{\ell^2}s]\mathrm{d}s.$$

因而，有

$$\dot{\Phi}\geqslant e^{-\frac{d\pi^2}{\ell^2+a\pi^2}t}\{\beta^2+\frac{\pi^2}{\ell^2+a\pi^2}\int_\alpha^{\Phi(t)}[f(s)-\frac{\ell^2+b\pi^2}{\ell^2}s]\mathrm{d}s\}^{\frac{1}{2}},\ t>0. \tag{3.4.9}$$

利用分离变量法，由(3.4.9)式可得

$$\frac{d\Phi}{\left\{\beta^2+\frac{2\pi^2}{\ell^2+a\pi^2}\int_\alpha^{\Phi(t)}(f(s)-\frac{\ell^2+b\pi^2}{\ell^2}s)\mathrm{d}s\right\}^{\frac{1}{2}}}\geqslant e^{-\frac{d\pi^2}{\ell^2+a\pi^2}t}\mathrm{d}t. \tag{3.4.10}$$

对(3.4.10)在 $(0,\ t)$ 上积分，可得

$$1 - e^{-\frac{d\pi^2}{\ell^2+a\pi^2}t} \leqslant \frac{d\pi^2}{\ell^2 + a\pi^2}\int_\alpha^{\Phi(t)} \{\beta^2 + \frac{2\pi^2}{\ell^2 + a\pi^2}\int_\alpha^y (f(s) - \frac{\ell^2 + b\pi^2}{\ell^2}s)\mathrm{d}s\}^{-\frac{1}{2}}dy$$

因此 $\Phi(t)$ 在有限时刻 $t_0 \leqslant \bar{T}_1 = -\frac{\ell^2 + a\pi^2}{d\pi^2}\ln(1 - B)$ 产生奇性。

最后，由于 $\Phi(t) > 0$，

$$\Phi(t) = \left|\Phi(t)\right| = \left|-\frac{\pi}{2\ell}\int_\Omega u(x,\ t)\sin\frac{\pi x}{\ell}\right| \leqslant \sup_{x\in\Omega}\left|u(x,\ t)\right|,$$

这表明(3.4.3)成立。

再考虑 $d \leqslant 0$ 的情形。由(3.4.7)式知

$$\ddot{\Phi} \geqslant \frac{\pi^2}{\ell^2 + a\pi^2}(f(\Phi) - \frac{\ell^2 + b\pi^2}{\ell^2}\Phi). \tag{3.4.11}$$

同样地，可以证明：当 $t > 0$ 时，$\dot{\Phi}(t) > 0$。(3.4.11)两端同乘以2 $\dot{\Phi}(t)$，可得

$$\frac{d}{\mathrm{d}t}[\dot{\Phi}^2 + \frac{\pi^2}{\ell^2 + a\pi^2}(\frac{\ell^2 + b\pi^2}{\ell^2}\Phi^2 - 2\int_\alpha^\Phi f(s)\mathrm{d}s)] \geqslant 0.$$

因而

$$(\dot{\Phi}(t))^2 \geqslant \beta^2 + \frac{2\pi^2}{\ell^2 + a\pi^2}(\int_\alpha^{\Phi(t)} f(s)\mathrm{d}s - \frac{\ell^2 + b\pi^2}{2\ell^2}\Phi^2) + \frac{\pi^2(\ell^2 + b\pi^2)}{\ell^2(\ell^2 + a\pi^2)}\alpha^2 \tag{3.4.12}$$

同前可知，由(3.4.12)得

$$t \leqslant \int_\alpha^{\Phi(t)} \{\beta^2 + \frac{2\pi^2}{\ell^2 + a\pi^2}(\int_\alpha^y f(s)\mathrm{d}s - \frac{\ell^2 + b\pi^2}{2\ell^2}y^2) + \frac{\pi^2(\ell^2 + b\pi^2)}{\ell^2(\ell^2 + a\pi^2)}\alpha^2\}^{-\frac{1}{2}}dy.$$

所以在有限时 $t_0 \leqslant \bar{T}_2$，$\Phi(t)$ 产生奇性。

由于 $\Phi(t) > 0$，因而

$$\Phi(t) = \left|\Phi(t)\right| \leqslant \sup_{x\in\Omega}\left|u(x,t)\right|,$$

这表明(3.4.4)式成立。定理证毕。

推论 3.4.1 对 $\forall p \in [1,\infty]$, $\|u\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_\Omega \left|u(x,t)\right|^p \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}$ 在有限时刻爆破。

第五节 问题(3.1.4), (3.1.2), (3.1.3)和(3.1.5), (3.1.2), (3.1.3)

在这一节中，把前面的结论用于问题(3.1.4), (3.1.2), (3.1.3)和问题(3.1.5), (3.1.2), (3.1.3)。

定理 3.5.1 假定 $u_0 \in H^4(\Omega)$, $u_1 \in H^3(\Omega)$, 则问题(3.1.5), (3.1.2), (3.1.3)存在唯一的整体广义解

$$u \in C([0,T];H^4(\Omega)) \cap C^1([0,T];H^3(\Omega)) \cap C^2([0,T];H^2(\Omega)).$$

证明 利用定理3.3.1知，只需证明 $f'(u) = \frac{1}{4}(3cu^2 + 12u)$ 是下有界的。事实上，

$$f'(u) = \frac{1}{4}(3cu^2 + 12u) = \frac{1}{4}\left(\sqrt{3c}u + \frac{6}{\sqrt{3c}}\right)^2 - \frac{3}{c} \geqslant -\frac{3}{c}.$$

定理得证。

利用压缩映射原理[16]或者 Galerkin 方法[17]，可以证明问题(3.1.4), (3.1.2), (3.1.3)存在唯一的局部广义解与唯一的局部古典解. 由定理3.4.1知道，下面的定理成立。

定理 3.5.2 设 $u(x,t)$ 是问题(3.1.4), (3.1.2), (3.1.3)的广义解。假定下列条件成立：

(1) $-\frac{\pi}{2\ell}\int_\Omega u_0(x)\sin\frac{\pi x}{\ell}\mathrm{d}x = \alpha > 0$, $-\frac{\pi}{2\ell}\int_\Omega u_1(x)\sin\frac{\pi x}{\ell}\mathrm{d}x = \beta > 0$;

(2) $\frac{3}{2}\alpha^2 - \frac{\ell^2 + b\pi^2}{\ell^2}\alpha \geqslant 0.$

则存在某有限时刻 $t_0 \leqslant \bar{T}_2$，有

$$\lim_{t \to t_0^-} \sup_{x \in \Omega} \left| u(x, t) \right| = \infty. \tag{3.5.1}$$

证明　由于

$$\begin{aligned}\bar{T}_2 &= \int_\alpha^\infty [\beta^2 + \frac{2\pi^2}{\ell^2 + a\pi^2}(\int_\alpha^y \frac{3s^2}{2}\mathrm{d}s - \frac{\ell^2 + b\pi^2}{2\ell^2}y^2) \\ &\quad + \frac{\pi^2(\ell^2 + b\pi^2)}{\ell^2(\ell^2 + a\pi^2)}\alpha^2]^{-\frac{1}{2}}dy \\ &= \int_\alpha^\infty [\beta^2 + \frac{\pi^2}{\ell^2 + a\pi^2}(y^3 - \alpha^3 \\ &\quad - \frac{\ell^2 + b\pi^2}{\ell^2}y^2) + \frac{\pi^2(\ell^2 + b\pi^2)}{\ell^2(\ell^2 + a\pi^2)}\alpha^2]^{-\frac{1}{2}}dy\end{aligned}$$

是收敛的，由定理3.4.1知道(3.5.1)式成立。

参考文献

[1] N. L. Pasternak. New Method for Calculation of Foundation on the Elastic Basement[M]. Moscow: Gosstroiizdat.

[2] A. M. Samsonov and E. V. Sokurinskaya. Energy exchange between nonlinear waves in elastic waveguides and external media, in "Nonlinear Waves in Active Media" [M]. Heidelberg: Springer - Verlag, Berlin, 1989: 99 - 104.

[3] A. M. Samsonov. Nonlinear strain waves in elastic waveguide, in "Nonlinear Waves in Solid (A. Jeffrey and J. Engelbrecht eds) CISM Courses and Lecture 341 [M]. New York: Springer, Wien, 1994.

[4] R. dodd et al. "Solitons and Nonlinear Wave equations"[M]. Academic Press, 1984.

[5] A. M. Samsonov. On existence of longitudinal strain solitions in

an infinite nonlinearly elastic rod [J]. Sov. Phys - Doklady, 1988, 4: 298 - 300.

[6] J. Boussinesq. Th\'eorie des ondes et des remous qui se propagent le long d'un canal rectangulaire horizontal, en Communiquant uliquide contenu dans ce cannal des vitesses. sensiblement pareilles de la surface au fond[J]. J. Math. Pure Appl., 1872, 17: 55 - 108.

[7] T. Kano and T. Nishida. A Mathematical justification for Korteweg - de Vries equation an Boussinesq equation of water surface waves[J]. Osaka J. Math. 1986(23): 389 - 413.

[8] A, V. Porubov. Strain solitary waves in an elastic rod with microstructure[J]. Rend. Sem. Mat. Univ. Pol. Torino, 2000, 58 (2): 189 - 198.

[9] V. G. Makhankov. Dynamics of classical solitons (in non - integrable systems)[J]. Physics Reports, A review section of Phys. Lett. (Section C) [J], 1978, 35 (1): 1 - 128.

[10] G. A. Mangin. Physical and Mathematical Models of Nonlinear Wave in Solid[M]. Elsevier, Jeffrey, Engelbrecht, Amsterdam etal. 1994.

[11] A. M. Samsonov. On some Exact Travelling Wave Solutions for Nonlinear Hyperbolic Equation[J]. π Pitmann Resarch Notes in Mathematics Series[J]. 1993, 227: 123 - 132.

[12] A. M. Samsonov and E. V. Sokurinskaya. On the excitation of a longitudinal deformation soliton in a nonlinear elastic rod[J]. Sov. Phys. Techn. Phys. 1988, 33: 989 - 991.

[13] Chen Guowang and Wang Shubin. Existence and nonexistence of global solution for the generalized IMBq equation[J]. Nonlinear Analysis TMA, 1991, 36: 961 - 980.

[14] Chen Guowang. Xing Jiasheng and Yang Zhijian. Cauchy prob-

lem for Generalized IMBq equation with several variables[J]. Nonlinear Analysis TMA, 1996, 26: 1255 - 1270.

[15] A. Friedman. Partial Differential Equations of Parabolic Type [M]. New Jersey: Prentic - Hall, Inglewood Cliffs, 1964.

[16] W. J. Hrusa. Global existence and asymptotic stability for a semilinear hyperbolic Volterra equation with large initial data [J]. SIAM J. Math. Anal. 1985, 16(1): 110 - 134.

[17] J. L. Lions. Queques methods de resolution des problems aux limits nonlineaires[M]. pairs: Dunod Gauthier - Villars, 1969.

第四章　一类高阶非线性波方程整体解的不存在性

第一节　引言

本章讨论如下 Boussinesq 型方程初边值问题

$$u_{tt} - u_{xx} - u_{xxtt} + au_{xxxx} + u_{xxxxtt} = (u^2)_{xx},\ 0 < x < 1,\ 0 < t < T, \tag{4.1.1}$$

$$u(0,\ t) = u(1,\ t) = 0,\ u_{xx}(0,\ t) = u_{xx}(1,\ t) = 0,\ 0 \leqslant t < T, \tag{4.1.2}$$

$$u(x,\ 0) = u_0(x),\ u_t(x,\ 0) = u_1(x),\ 0 \leqslant x \leqslant 1, \tag{4.1.3}$$

其中 $u(x,\ t)$ 是关于变量 $x \in (0,\ 1)$ 和 $t \in R^+$ 的函数，$u(x,\ t)$ 是未知函数，$a > 0$ 是常数，$u_0(x)$ 和 $u_1(x)$ 是已知的初始函数。方程(4.1.1) 是在研究具有表面张力的水波问题时提出的[1]。

我们知道，对于通常的 Bq 方程、IBq 方程和 IMBq 方程和由 Zakharov[2] 作为非线性弦振动模型提出的后人称之为“好”的 Bq 方程

$$u_{tt} - u_{xx} + u_{xxxx} = (u^2)_{xx}$$

在文献[3 -7]中研究了这些方程的行波解和孤立子解，对于好的 Bq 方程、IBq 型和 IMBq 型方程及方程组的 Cauchy 问题，初边值问题等都有很多研究[8-22]。

本文首先证明问题(4.1.1) -(4.1.3)的局部广义解的存在性与唯一性，然后用凸性方法证明解的爆破性质，给出解爆破的充分条件。

文中将分别用 $\|\cdot\|$ 和 $\|\cdot\|_{H^m}$ 表示 $L^2(0,\ 1)$ 和 Sobobev 空间

$H^m(0, 1)$ 中的范数，有时记 $\Omega = (0, 1)$。

第二节　局部广义解的存在唯一性

应用 Galerkin 方法和紧致性原理证明问题(4.1.1)-(4.1.3)的解的存在性。

设 $\{y_j(x)\}$ 是由特征值问题

$$\begin{cases} y'' + \lambda y = 0, 0 < x < 1, \\ y(0) = y(1) = 0 \end{cases} \tag{4.2.1}$$

对应特征值 $\lambda_j (j = 1, 2, \cdots)$ 的特征函数构成的 $L^2(0, 1)$ 中的标准正交基。

设问题(4.1.1)-(4.1.3)的 Galerkin 近似解为

$$u_N(x, t) = \sum_{j=1}^{N} \alpha_{Nj}(t) y_j(x),$$

其中 $\alpha_{Nj}(t)$ 是待定系数，N 是自然数。设初边值函数 $u_0(x)$ 和 $u_1(x)$ 可表示为

$$u_0(x) = \sum_{j=1}^{\infty} \varphi_j y_j(x),\ u_1(x) = \sum_{j=1}^{\infty} \psi_j y_j(x),$$

其中 φ_j 和 $\psi_j (j = 1, 2, \cdots)$ 是常数。将近似解 $u_N(x, t)$ 以初值函数 $u_0(x)$ 和 $u_1(x)$ 的近似

$$u_{0N}(x) = \sum_{j=1}^{N} \varphi_j y_j(x),\ u_{1N}(x) = \sum_{j=1}^{N} \psi_j y_j(x)$$

分别代入(4.1.1)和(4.1.3)，并在 Ω 上积分得

$$\begin{cases} (1 + \lambda_s + \lambda_s^2)\ddot{\alpha}_{Ns} + (\lambda_s + \alpha\lambda_s^2)\alpha_{Ns} = ((u_N^2)_{xx}, y_s), & (4.2.2) \\ \alpha_{Ns}(0) = \varphi_s,\ \dot{\alpha}_{Ns}(0) = \psi_s,\ s = 1, 2, \cdots, N & (4.2.3) \end{cases}$$

其中 $\dot{\alpha}_{Ns} = \dfrac{d\alpha_{Ns}(t)}{dt}$，$(\cdot, \cdot)$ 表示 $L^2(\Omega)$ 上的内积。

引理 4.2.1　令

$$E_N(t) = \sum_{s=1}^{N} \Big\{ (1 + \lambda_s + 2\lambda_s^2 + \lambda_s^3 + 2\lambda_s^4)\dot{\alpha}_{Ns}^2$$

$$+ (1 + \lambda_s + a\lambda_s^2 + \lambda_s^3 + a\lambda_s^4)\alpha_{Ns}^2 \Big\} + 1, \qquad (4.2.4)$$

如果

$$\lim_{N\to+\infty} E_N(0) = E$$
$$= \sum_{s=1}^{\infty} \Big\{ (1 + \lambda_s + 2\lambda_s^2 + \lambda_s^3 + 2\lambda_s^4)\psi_s^2$$
$$+ (1 + \lambda_s + a\lambda_s^2 + \lambda_s^3 + a\lambda_s^4)\varphi_s^2 \Big\} + 1 < \infty, \qquad (4.2.5)$$

则常微分方程组初值问题(4.2.2), (4.2.3)在 $[0, t_0]$ 上存在古典解 $\alpha(t) = (\alpha_{N1}(t), \alpha_{N2}(t), \cdots, \alpha_{NN}(t))$ 且

$$E_N(t) \leqslant \frac{E}{(1 - \frac{1}{2}KE^{\frac{1}{2}}t_0)^2} = M \qquad (4.2.6)$$

在区间 $[0, t_0]$ 上一致有界, 其中 $t_0 > 0$, $K > 0$ 以及界 M 都与 N 无关。

证明 问题(4.2.2), (4.2.3)是关于 $\alpha_{Ns}(t)$, $s = 1, 2, \cdots, N$ 的二阶常微分方程组的初值问题, 可以等价地化为 $2N$ 维一阶常微分方程组的初值问题, 注意到非线性项的光滑性, 局部解总是存在的。记解的最大存在区间是 $[0, T_N)$, 由下面对解的估计知道 T_N 有不依赖于 N 的正下界。

方程组(4.2.2)两端乘以 $(1 + \lambda_s^2)\dot{\alpha}_{Ns}$, 乘积对 $s = 1, 2, \cdots, N$ 求和, 并于两边同时加上 (u_N, u_{Nt}), 得

$$\frac{d}{dt}E_N(t) = 2((u_N^2)_{xx}, u_{Nt} + u_{Nx^4t}) + 2(u_N, u_{Nt})$$
$$= 4(u_{Nx}^2 + u_N u_{Nxx}, u_{Nt} + u_{Nx^4t}) + 2(u_N, u_{Nt}). \qquad (4.2.7)$$

利用 Sobolev 空间嵌入定理和(4.2.4)式得

$$\| u_N \|_{C^3(\bar{\Omega})} \leqslant C_1 \| u_N \|_{H^4} \leqslant C_2(E_N(t))^{\frac{1}{2}}, \qquad (4.2.8)$$

这里及下面出现的 C_i 表示与 N 无关的常数。

利用 Hölder 不等式及(4.2.4)和(4.2.8)式，有

$$\begin{aligned}&\left|4(u_{Nx}^2+u_Nu_{Nxx},\ u_{Nt}+u_{Nx^4t})+2(u_N,\ u_{Nt})\right|\\&\leqslant C_3[(\|u_{Nx}\|_{C(\bar{\Omega})}\|u_{Nx}\|+\|u_N\|_{C(\bar{\Omega})}\|u_{Nxx}\|)\\&\quad(\|u_{Nt}\|+\|u_{Nx^4t}\|)+\|u_N\|\|u_{Nt}\|]\\&\leqslant K(E_N(t))^{\frac{3}{2}},\end{aligned}\tag{4.2.9}$$

其中 $K>0$ 是不依赖于 N 的常数。

对于 $t\in[0,\ T_N)$，由(4.2.9)知

如果 t_0 满足 $0<1-\frac{1}{2}KE^{\frac{1}{2}}t_0\leqslant\gamma$，其中 $0<\gamma<1$，则在区间 $[0,\ t_0]$ 上(4.2.6)式成立，且 $\frac{2(1-\gamma)}{KE^{\frac{1}{2}}}\leqslant t_0<\frac{2}{KE^{\frac{1}{2}}}$，其中 $\frac{2(1-\gamma)}{KE^{\frac{1}{2}}}>0$ 是常数，这表明 T_N 有正下界。引理得证。

引理 4.2.2 在引理 4.2.1 的条件下，问题(4.1.1)－(4.1.3)的近似解 $u_N(x,\ t)$ 有估计

$$\|u_N\|_{H^4}+\|u_{Nt}\|_{H^4}\leqslant C_3,\ t\in[0,\ t_0].\tag{4.2.10}$$

证明 注意到 $E_N(t)$ 的表达式(4.2.4)，并应用(4.2.6)式，显然有(4.2.10)。引理证毕。

引理 4.2.3 在引理 4.2.1 的条件下，问题(4.1.1)－(4.1.3)的近似解

$u_N(x,\ t)$ 有估计式

$$\|u_{Ntt}\|_{H^4}\leqslant C_4,\ t\in[0,\ t_0].\tag{4.2.11}$$

证明 方程(4.2.2)乘以 $(1+\lambda_s^2)\ddot{\alpha}_{Ns}$，并对 $s=1,2,\cdots,N$ 求和，得

$$\begin{aligned}&\sum_{s=1}^{N}(1+\lambda_s+\lambda_s^2)(1+\lambda_s^2)\ddot{\alpha}_{Ns}^2+\sum_{s=1}^{N}(1+\lambda_s^2)(\lambda_s+a\lambda_s^2)\alpha_{Ns}\ddot{\alpha}_{Ns}\\&=((u_N^2)_{xx},\ u_{Ntt}+u_{Nx^4_{tt}}),\end{aligned}$$

即

$$\| u_{Ntt} \|^2 + \| u_{Nxtt} \|^2 + 2\| u_{Nxxtt} \|^2 + \| u_{Nx^3tt} \|^2 + \| u_{Nx^4tt} \|^2$$
$$= (u_{Nxx} - au_{Nx^4},\ u_{Ntt} + u_{Nx^4tt}) + ((u_N^2)_{xx},\ u_{Ntt} + u_{Nx^4tt}). \quad (4.2.12)$$

利用 Sobolev 空间嵌入定理和(4.2.10)得

$$\| u_N \|_{C^3(\bar{\Omega})} \leqslant C_5,\ \forall t \in [0,\ t_0]. \quad (4.2.13)$$

对(4.2.12)的右端项使用 Hölder 不等式以及 Young 不等式，并利用(4.2.10)和(4.2.13)，便得到(4.2.11)。引理证毕。

定理 4.2.4 在引理 4.2.1 的条件下，初边值问题(4.1.1)-(4.1.3)存在唯一的局部广义解 $u(x,\ t)$.

证明 由引理 4.2.1-4.2.3 知，在定理的假定条件下，问题(4.1.1)-(4.1.3)的近似解 $u_N(x,\ t)$ 有估计式

$$\| u_N \|_{H^4} + \| u_{Nt} \|_{H^4} + \| u_{Ntt} \|_{H^4} \leqslant C_6,\ \forall t \in [0,\ t_0].$$

利用弱紧致性原理和 Ascoli-Arzelà 定理知，存在 $\{u_N(x,\ t)\}_{N=1}^{\infty}$ 中的子序列(仍然记为) $\{u_N(x,\ t)\}_{N=1}^{\infty}$ 和函数 $u(x,\ t)$ ：当 $N \to \infty$ 时，$u_{Nx^it^j}(i=0,1,2,3,4;j=0,1,2)$ 在 $L^2(0,\ t_0;L^2(\Omega))$ 中分别弱收敛于 $u(x,\ t)$ 的相应的各阶导数 $u_{x^it^j}(i=0,1,2,3,4;j=0,1,2)$，并且 u_{Nx} 和 u_{Nxx} 分别在 $[0,\ 1]\times[0,\ t_0]$ 上一致收敛于 $u(x,\ t)$ 的相应导数 u_x 和 u_{xx}。易知 $u(x,\ t)$ 是初边值问题(4.1.1)-(4.1.3)的局部广义解。

下面证明局部广义解的唯一性。设 $u(x,\ t)$ 和 $v(x,\ t)$ 是初边值问题(4.1.1)-(4.1.3) 的两个广义解。则 $w(x,t)$ 满足

$$w_{tt} - w_{xx} - w_{xxtt} + aw_{xxxx} + w_{xxxxtt} = (u^2)_{xx} - (v^2)_{xx},$$
$$0 < x < 1, 0 < t < t_0, \quad (4.2.14)$$
$$w(0,t) = w(1,t) = w_{xx}(0,t) = w_{xx}(1,t) = 0, 0 \leqslant t \leqslant t_0, \quad (4.2.15)$$
$$w(x,0) = w_t(x,0) = 0, 0 \leqslant x \leqslant 1. \quad (4.2.16)$$

方程(4.2.14)两边同乘以 $w_t(x,\ t)$，在 Ω 上积分，经过分部积分，得

$$\frac{d}{dt}[\| w \|^2 + \| w_t \|^2 + \| w_x \|^2 + \| w_{xt} \|^2 + a\| w_{xx} \|^2 + \| w_{xxt} \|^2]$$

$$= -2\int_{\Omega}(2uu_x - 2vv_x)w_{xt}\mathrm{d}x + 2\int_{\Omega}ww_t\mathrm{d}x$$
$$-4\int_{\Omega}(u_x w + vw_x)w_{xt}\mathrm{d}x + 2\int_{\Omega}ww_t\mathrm{d}x$$
$$\leqslant C_7(\|w\|\|w_{xt}\| + \|w_x\|\|w_{xt}\| + \|w\|\|w_t\|)$$
$$\leqslant C_8(\|w\|^2 + \|w_t\|^2 + \|w_x\|^2 + \|w_{xt}\|^2). \quad (4.2.17)$$

利用 Gronwall 不等式，由(4.2.16)和(4.2.17)得

$$\|w\|^2 + \|w_t\|^2 + \|w_x\|^2 + \|w_{xt}\|^2 + a\|w_{xx}\|^2 + \|w_{x^2t}\|^2 = 0,$$

从而 $u(x, t) = v(x, t)$. 唯一性得证。定理证毕。

第三节 解的爆破

引理 4.3.1 （Jensen 不等式）设 $g(x)$ 定义在 (a, b) 上，$g(x) \in [a_1, b_1]$，其中 a, b, a_1, b_1 是有限数或 ∞，$f(x)$ 是 (a_1, b_1) 上的连续的凸函数。$q(x) \in L^1[a, b]$，且 $q(x) \geqslant 0$，则有

$$f\left(\frac{\int_a^b g(x)q(x)\mathrm{d}x}{\int_a^b q(x)\mathrm{d}x}\right) \leqslant \frac{\int_a^b f(g(x))q(x)\mathrm{d}x}{\int_a^b q(x)\mathrm{d}x}$$

在右端有限时成立。

引理 4.3.2 [23]设 $\varphi(t) \in C^2$ 满足 $\ddot{\varphi}(t) \geqslant h(\varphi)(t \geqslant 0)$，且 $\varphi(0) = \alpha > 0$, $\dot{\varphi}(0) = \beta > 0$. 如果对所有的 $s \geqslant \alpha$, $h(s) \geqslant 0$，则在 $\dot{\varphi}(t)$ 的定义域内有 $\dot{\varphi}(t) > 0$ 且成立不等式

$$t \leqslant \int_{\alpha}^{\varphi(t)}\left[\beta^2 + 2\int_{\alpha}^{s}h(\xi)d\xi\right]^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}s.$$

定理 4.3.3 设 $u(x, t)$ 是问题(4.1.1)－(4.1.3)的广义解，且

$$-\int_0^1 \omega(x)u_0(x)\mathrm{d}x = \alpha \geqslant 1 + a\mu,$$
$$-\int_0^1 \omega(x)u_1(x)\mathrm{d}x = \beta > 0,$$

其中 $\omega(x)$ 表示特征值问题

$$\omega'' + \lambda\omega = 0,\ \omega(0) = \omega(1) = 0,\ 0 < x < 1 \quad (4.3.1)$$

的第一规范化特征函数，$\lambda = \mu$ 表示对应的第一特征值，则 $\exists T_0 \leqslant \bar{T}$，使得 $\lim\limits_{t \to T_0^-} \sup\limits_{x \in (0,1)} \left| u(x,t) \right| = +\infty$，其中

$$\bar{T} = \int_\alpha^{+\infty} \left[\beta^2 + \frac{\mu + a\mu^2}{1+\mu+\mu^2}(\alpha^2 - s^2) + \frac{2\mu}{3(1+\mu+\mu^2)}(s^3 - \alpha^3) \right]^{-\frac{1}{2}} \mathrm{d}s < +\infty.$$

证明 记 $\varphi(t) = -\int_0^1 \omega(x) u(x,t)\,\mathrm{d}x.$

方程(4.1.1)两边同乘以 $\omega(x)$ 并在(0, 1)上积分得

$$-\ddot{\varphi} - \int_0^1 \omega u_{x^2t^2}\mathrm{d}x + \int_0^1 \omega u_{x^4t^2}\mathrm{d}x = \int_0^1 \omega u_{xx}\mathrm{d}x - a\int_0^1 \omega u_{x^4}\mathrm{d}x + \int_0^1 \omega (u^2)_{xx}\mathrm{d}x. \quad (4.3.2)$$

注意到 $\omega(x)$ 及 $u(x,t)$ 所满足的边界条件，通过分部积分可得

$$-\int_0^1 \omega u_{x^2t^2}\mathrm{d}x = -\mu\ddot{\varphi},\ \int_0^1 \omega u_{x^4t^2}\mathrm{d}x = -\mu^2\ddot{\varphi}, \quad (4.3.3)$$

$$\int_0^1 \omega u_{xx}\mathrm{d}x = \mu\varphi,\ -a\int_0^1 \omega u_{x^4}\mathrm{d}x = a\mu^2\varphi,$$

$$\int_0^1 \omega (u^2)_{xx}\mathrm{d}x = -\mu\int_0^1 \omega u^2\mathrm{d}x. \quad (4.3.4)$$

把(4.3.3)，(4.3, 4)代入(4.3.2)得到

$$(1+\mu+\mu^2)\ddot{\varphi} + \mu(1+a\mu)\varphi = \mu\int_0^1 \omega u^2\mathrm{d}x. \quad (4.3.5)$$

利用 Jensen 不等式，得

$$\mu\int_0^1 \omega u^2\mathrm{d}x \geqslant \mu\left(\int_0^1 \omega u\mathrm{d}x\right)^2 = \mu\varphi^2. \quad (4.3.6)$$

由(4.3.5)和(4.3.6)得

$$\ddot{\varphi} \geqslant \frac{-\mu(1+a\mu)}{1+\mu+\mu^2}\varphi + \frac{\mu}{1+\mu+\mu^2}\varphi^2. \quad (4.3.7)$$

记

$$h(s) = \frac{\mu}{1+\mu+\mu^2}s^2 - \frac{\mu(1+a\mu)}{1+\mu+\mu^2}s,$$

则当 $s \geqslant \alpha \geqslant 1 + a\mu$ 时，

$$h(s) = \frac{\mu}{1+\mu+\mu^2}s[s-(1+a\mu)] \geqslant 0. \qquad (4.3.8)$$

利用引理4.3.2，注意到 $\varphi(0) = \alpha > 0, \dot{\varphi}(0) = \beta > 0$ 及(4.3.7)和(4.3.8)式，知：在 $\varphi(t)$ 的定义域内 $\dot{\varphi}(t) > 0$ 并且

$$t \leqslant \int_{\alpha}^{\varphi(t)} \left[\beta^2 + \frac{\mu + a\mu^2}{1+\mu+\mu^2}(\alpha^2 - s^2) + \frac{2\mu}{3(1+\mu+\mu^2)}(s^3 - \alpha^3)\right]^{-\frac{1}{2}} ds.$$

因此，在有限时刻 $T_0 \leqslant \bar{T}$，$\varphi(t)$ 产生奇性，由于 $\varphi(t) > 0$，从而

$$\varphi(t) \leqslant \sup_{x\in(0,1)} \left| u(x,t) \right|.$$

定理证毕。

参考文献

[1] G. Schneider, C. W. Eugene, Kawahara dynamics in dispersive [J]. media, Physica. D, 2001, 152 - 153: 384 - 394.

[2] V. E. Zakharov. On stochastization of one - dimensional chains of nonlinear oscillators[J]. Sov. Phys, JETP, 1974, 39: 108 - 110.

[3] V. G. Makhankov. Dynamics of classical solitons (innon - integrable systems) [J]. Physics Reports, A review section of Phys. Lett. (Section C), 1978, 35 (1): 1 - 128.

[4] I. L. Bogolubsky. Some examples of inelastic soliton interaction [J]. Comput, Phys. Comm., 1977, 13: 149 - 155.

[5] M. P. Soerense. P. L. Christiansen and P. S. Lomdahl, Solitary waves on nonlinear elastic rods I[J]. J. Acoust. Soc. A-

mer. , 1984, 76: 871 -879.

[6] A. Clarkson, R. J. Leveque and R. Saxton, Solitary - wave interactions in elastic rods[J]. Studies in Appl. Math. 1986, 75: 95 -122.

[7] R. L. Pego and M. I. Weninstein. Eigenvalnes and instabilities of solitary waves[J]. phil. Trans. R. Soc. Lond. 1992, 340A: 47 -94.

[8] G. S. Warnecke. Uber das homogene dirichlet - problem beinichtlinearen paritiellen differentialgleichungen vom typ der Boussinesq - Gleichung [J]. Math. Meth Appl. Sci. 1987, 9: 493 -519.

[9] J. L. Bona and R. L. Sachs. Global existence of smooth solutions and stability of solitary waves for a generalized Boussinesq equation[J]. Commun. Math. phy. 1988, 118: 15 -29.

[10] R. L. Sachs. on the blow up of certain solution of the "good" Boussinesq equation[J]. Appl. Anal. 1990, 34: 145 -152.

[11] M. Tsutsumi and T. Matahashi. On the Cauchy problem for the Boussinesq type equation[J]. Math. Japonica, 1991, 26 (2): 371 -379.

[12] B. Straughan. Global nonexistence of solutions to some Boussinesq - type equations[J]. J. Math. Phys. Sci. , 26 (1992), 155 -164.

[13] F. Lineras. Global existence of small solutions for a generalized Boussinesq equation[J]. J. Diff. Eq. 1993, 106: 257 -293.

[14] Liu Yue. Existence and blow up of solutions of a nonlinear Pochhammer - Chree equation [J]. Indiana Univ. Math. J. , 1996, 45: 797 -916.

[15] 杨志坚，陈国旺. 一类广义 Boussinesq 型方程解的 Blow up [J]. 数学物理学报，1996, 16 (1): 31 -39.

[16] 杨志坚，陈国旺. Boussinesq 型方程的周期边界问题与初值问题的解的存在性[J]. 应用数学学报，2000，23（2）：261 -269.

[17] Yang Zhijian. Existence and non - existence of global solutions to a generalized modification of the improved Boussinesq equation[J]. Math Meth. Appl. Sci. 1998, 21: 1467 -1477.

[18] S. K. Turitsyn. Blow - up in the Boussinesq equation [J]. Phys. Rev. E, 1993, 47: 796 -799.

[19] S. K. Turitsyn. On a Toda lattice model with a transversal of freedom sufficient criterion of blow - up in the continuum limit [J]. Phys. Lett. A, 1993, 173: 267 -269.

[20] D. G. Akmel. Blow up of solutions of a generalized Boussinesq equation[J]. IMA. J. Appl. Math. 1998, 60: 123 -138.

[21] Chen Guowang and Wang Shubin. Cauchy Problem for generalized MYMIMBqMYM equation, proceedings of the Conference on Nonlinear Partial Differential equations and Applications (Guo Boling and Yang Dadi, Eds)[J]. World Scientific, Singgapore, 1998.

[22] Liu Fang - Lan, L. R. David. Solutions of the Boussinesq equation on a periodic domain[J]. J. Math. Analysis and Applications, 1995, 192: 194 -219.

[23] R. T. Glassey. Blow - up theorems for nonlinear wave equations[J]. Math. Z. 1973, 132: 183 -203.

第五章 一类非线性双曲型方程初边值问题解的爆破

第一节 引言和主要定理

本文研究如下非线性双曲型方程的初边值问题

$$u_{tt}-u_{xx}+au_{xxxx}-bu_{xxtt}=\varphi(u_x)_x,\ x\in(0,1),\ t\in(0,T) \tag{5.1.1}$$

$$u(0,t)=u(1,t)=0,\ u_{xx}(0,t)=u_{xx}(1,t)=0,\ t\in(0,T) \tag{5.1.2}$$

$$u(x,0)=u_0(x),\ u_t(x,0)=u_1(x),\ x\in[0,1]. \tag{5.1.3}$$

证明问题局部解的存在性和唯一性，并讨论问题解的爆破。其中 $u(x,t)$ 表示未知函数，$a>0$，$b>0$ 是常数，$\varphi(x)$ 是给定的非线性函数，$u_0(x)$ 和 $u_1(x)$ 是已知的满足边界条件(5.1.2)的初值函数。下标 t 和 x 分别表示对求 t 和 x 偏导数。

有些物理问题可以用方程(5.1.1)进行描述。对弹塑性杆中纵向运动的微观结构模型的弱非线性分析的研究中，文献[1]提出了如下的非线性偏微分方程

$$u_{tt}+u_{xxxx}=a(u_x^2)_x \tag{5.1.4}$$

其中，$a\neq 0$ 是常数。

文献[2, 3]研究非线性弹性杆中的应变孤波，指出纵向波方程为

$$u_{tt}-[a_0+na_1(u_x)^{n-1}]u_{xx}-a_2u_{xxtt}=0 \tag{5.1.5}$$

其中 a_0，a_2 是常数，a_1 是任意的实数，n 是自然数。

文献[4, 5]对晶格动力学的研究中，提出了如下方程

$$u_{tt}-u_{xx}+au_{xxxx}-bu_{xxtt}=c(u_x^2)_x \tag{5.1.6}$$

显然，方程(5.1.4) - (5.1.6)都是方程(5.1.1)的特殊

情形。

对模型方程(5.1.4)，文献[6]研究了其初边值问题的整体解的存在性和不存在性。在文献[7]中，作者证明了方程(5.1.5)初边值问题整体古典解的存在性和唯一性，同时也研究了问题非整体解的爆破。然而，对方程(5.1.6)的初边值问题尚未见有研究结论。方程(5.1.1)作为方程(5.1.6)的广义情形，当然就没有研究结果。

为了研究非线性发展方程解的爆破，通常的方法就是建立关于解的能量不等式[8-11]。为此，通常利用所谓的“凸性方法”，讨论非线性发展方程解的爆破。这种方法要求建立一个微分不等式 $\psi''\psi-(1+\alpha)\psi'^2\geqslant 0$, $t\geqslant 0$，其中，$\psi(t)$ 是正的二次可微的函数[10, 11]。为了证明我们的主要定理，文中将构造不等式(5.2.17)，借此不等式完成定理的证明。

对问题(5.1.1)－(5.1.3)，有下面的定理：

定理 5.1.1　假定 $u_0(x)\in H^4[0,1]$，$u_1(x)\in H^3[0,1]$，且 $\varphi\in C^3(R)$. 则问题(5.1.1)－(5.1.3)有唯一的局部广义解

$$u(x,t)\in C([0,T_0);H^4[0,1])\cap C^1([0,T_0)\,H^3[0,1])\cap C^2([0,T_0);H^2[0,1])$$

其中 $[0,T_0)$ 是最大时间区间。

利用对线性问题的分析和不动点理论，容易给出定理 5.1.1 的证明[12]。

为了讨论解的爆破，需要如下的引理：

引理 5.1.1[13]　假定 $\dot{u}=G(t,u)$，$\dot{v}\geqslant G(t,v)$，$G\in C([0,+\infty)\times(-\infty,+\infty))$，且 $u(t_0)=v(t_0)$，$t_0\geqslant 0$，则当 $t\geqslant t_0$ 时，$v(t)\geqslant u(t)$ 成立。这里以及后面的“$\cdot$” $=\frac{d}{dt}$.

主要定理　假定下面的条件成立：

(1) $s\varphi(s) \leq B\Phi(s)$, $\Phi(s) \leq -\lambda\left|s\right|^{p+1}$, 其中 $\Phi(s) = \int_0^s \varphi(\tau)\mathrm{d}\tau$, $B > 2$, $\lambda > 0$ 和 $p > 1$ 是常数;

(2) $u_0 \in H^2(0, 1)$, $u_1 \in H^1(0, 1)$ 和

$$\begin{aligned} E(0) &= \| u_1 \|^2 + \| u_{0x} \|^2 + a \| u_{0xx} \|^2 + b \| u_{1x} \|^2 \\ &\quad + 2\int_0^1 \Phi(u_{0x})\mathrm{d}x \\ &\leq -2^{\frac{p-2}{p-1}}\left[(B-2)\frac{\lambda}{(p+3)}\right]^{\frac{2}{(1-p)}}\left(1 - e^{\frac{(1-p)}{4}}\right)^{\frac{4}{(1-p)}} \\ &< 0, \end{aligned}$$

则问题(5.1.1) – (5.1.3)的解在有限时刻 T_1 爆破, 即当 $t \to T_1^-$ 时,

$$\| u(t) \|^2 + b \| u_x(t) \|^2 + \int_0^t \int_0^\tau \| u_x(s) \|^2 \mathrm{d}s\mathrm{d}\tau \to +\infty,$$

其中 $\|\cdot\|$ 表示空间 $L^2(0, 1)$ 中的范数。

第二节　主要定理的证明

方程(5.1.1)的两端同乘以 $2u_t$, 然后在[0, 1]上积分, 有

$$\dot{E}(t) = 0, \ t > 0, \tag{5.2.1}$$

其中

$$\begin{aligned} E(t) &= \| u_t(t) \|^2 + \| u_x(t) \|^2 + a \| u_{xx}(t) \|^2 \\ &\quad + b \| u_{xt}(t) \|^2 + 2\int_0^1 \Phi(u_x(x, t))\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

则

$$E(t) = E(0) = E_0 < 0, \ t > 0. \tag{5.2.2}$$

记

$$A(t) = \| u(t) \|^2 + b \| u_x(t) \|^2 + \int_0^t \int_0^\tau \| u_x(s) \|^2 \mathrm{d}s\mathrm{d}\tau.$$

因而

$$\dot{A}(t) = 2\int_0^1 u(x, t)u_t(x, t)\mathrm{d}x + 2b\int_0^1 u_x(x, t)u_{xt}(x, t)\mathrm{d}x + \int_0^t \| u_x(s) \|^2\mathrm{d}s. \qquad (5.2.3)$$

利用方程(5.1.1)，得

$$\begin{aligned}\ddot{A}(t) &= 2\int_0^1 \{u_t^2 + uu_{tt} + bu_{xt}^2 + bu_x u_{xtt}\}\mathrm{d}x + \| u_x \|^2 \\ &= 2\int_0^1 \{u_t^2 + \frac{1}{2}u_x^2 + bu_{xt}^2 + u(u_{tt} - bu_{xxtt})\}\mathrm{d}x \\ &= 2\int_0^1 \{u_t^2 + \frac{1}{2}u_x^2 + bu_{xt}^2 + u[u_{xx} - au_{xxxx} + \varphi(u_x)_x]\}\mathrm{d}x \\ &= 2\int_0^1 \{u_t^2 + \frac{1}{2}u_x^2 + bu_{xt}^2 - u_x^2 - au_{xx}^2 - \varphi(u_x)u_x]\}\mathrm{d}x.\end{aligned} \qquad (5.2.4)$$

注意到主要定理的假定条件(1)，由(5.2.4)可得

$$\ddot{A}(t) \geqslant 2\| u_t \|^2 + \| u_x \|^2 + 2b\| u_{xt} \|^2 - 2\| u_x \|^2 - 2a\| u_{xx} \|^2 - 2\Phi(u_x). \qquad (5.2.5)$$

由(5.2.2)式可得

$$B\int_0^1 \Phi(u_x(x, t))\mathrm{d}x = E_0 - \| u_t \|^2 - \| u_x \|^2 - a\| u_{xx} \|^2 - b\| u_{xt} \|^2 + (B-2)\int_0^1 \Phi(u_x(x, t))\mathrm{d}x. \qquad (5.2.6)$$

把(5.2.6)代入(5.2.5)，可得

$$\begin{aligned}\ddot{A}(t) &\geqslant 4\| u_t \|^2 + \| u_x \|^2 + 4b\| u_{xt} \|^2 - 2E_0 - 2(B-2)\int_0^1 \Phi(u_x(x, t))\mathrm{d}x \\ &\geqslant 4\| u_t \|^2 + \| u_x \|^2 + 4b\| u_{xt} \|^2 - 2E_0 + 2(B-2)\lambda\int_0^1 \left| u_x(x, t) \right|^{p+1}\mathrm{d}x > 0.\end{aligned} \qquad (5.2.7)$$

由(5.2.7)可得，

$$\dot{A}(t) \geqslant -2E_0 t + 2(B-2)\lambda \int_0^t \int_0^1 \left| u_x(x,\tau) \right|^{p+1} \mathrm{d}x\mathrm{d}\tau + \dot{A}(0), \tag{5.2.8}$$

$$A(t) \geqslant -E_0 t^2 + 2(B-2)\lambda \int_0^t \int_0^\tau \int_0^1 \left| u_x(x,s) \right|^{p+1} \mathrm{d}x\mathrm{d}s\mathrm{d}\tau + \dot{A}(0)t + A(0), \tag{5.2.9}$$

其中 $\dot{A}(0) = 2\int_0^1 u_0 u_1 \mathrm{d}x + 2b\int_0^1 u_{0x}u_{1x}\mathrm{d}x$, $A(0) = \| u_0 \|^2 + b\| u_{0x} \|^2$. 由(5.2.7)和(5.2.9)得

$$\ddot{A}(t) + A(t) \geqslant 2(B-2)\lambda\left(\int_0^1 \left| u_x(x,t) \right|^{p+1} \mathrm{d}x + \int_0^t \int_0^\tau \int_0^1 \left| u_x(x,s) \right|^{p+1} \mathrm{d}x\mathrm{d}s\mathrm{d}\tau\right) - E_0 t^2 + \dot{A}(0)t - 2E_0 + A(0) \tag{5.2.10}$$

利用 Hölder 不等式和 Poincare 不等式，有

$$\| u(t) \|^{p+1} \leqslant \| u_x(t) \|^{p+1} \leqslant \int_0^1 \left| u_x \right|^{p+1} \mathrm{d}x, \tag{5.2.11}$$

$$\int_0^t \int_0^\tau \int_0^1 \left| u_x(x,s) \right|^{p+1} \mathrm{d}x\mathrm{d}s\mathrm{d}\tau \leqslant 2^{\frac{1-p}{1+p}} t^{\frac{2p-2}{p+1}} \left(\int_0^t \int_0^\tau \int_0^1 \left| u_x(x,s) \right|^{p+1} \mathrm{d}x\mathrm{d}s\mathrm{d}\tau\right)^{\frac{2}{p+1}},$$

$$\int_0^t \int_0^\tau \int_0^1 \left| u_x(x,s) \right|^{p+1} \mathrm{d}x\mathrm{d}s\mathrm{d}\tau \geqslant 2^{\frac{p-1}{2}} t^{1-p} \left(\int_0^t \int_0^\tau \int_0^1 \left| u_x(x,s) \right|^{p+1} \mathrm{d}x\mathrm{d}s\mathrm{d}\tau\right)^{\frac{2p+1}{2}}, \tag{5.2.12}$$

注意到不等式

$$(\alpha+\beta+\gamma)^n \leqslant 2^{n-1}(\alpha^n+\beta^n+\gamma^n), \alpha,\beta,\gamma > 0, n > 1,$$

把(5.2.11)，(5.2.12)代入(5.2.10)，可以得到

$$\ddot{A}(t) + A(t) \geqslant 2^{\frac{p-1}{2}} t^{1-p}\left(\int_0^t \int_0^\tau \int_0^1 \left| u_x(x,s) \right|^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}s\mathrm{d}\tau\right)$$

$$
\begin{aligned}
&+ (B-2)\lambda b^{-\frac{p+1}{2}}(\sqrt{b}\,\|u_x(t)\|)^{p+1} - E_0t^2 \\
&+ \dot{A}(0)t - 2E_0 + A(0) + (B-2)\lambda\|u(t)\|^{p+1} \\
\geqslant & - E_0t^2 + \dot{A}(0)t - 2E_0 + A(0) \\
&+ k_0t^{1-p}[\|u(t)\|^{p+1} + \sqrt{b}\,\|u_x(t)\|^{p+1} \\
&+ (\int_0^t\int_0^\tau\int_0^1 \left|u_x(x,s)\right|^{p+1} \mathrm{d}x\mathrm{d}s\mathrm{d}\tau)^{\frac{p+1}{2}}] \\
\geqslant & - E_0t^2 + \dot{A}(0)t - 2E_0 + A(0) \\
&+ 2^{1-p}k_0t^{1-p}(A(t))^{\frac{p+1}{2}}, t \geqslant 1 \qquad (5.2.13)
\end{aligned}
$$

由(5.2.8)和(5.2.9)可知，当 $t \to \infty$ 时，$A(t) \to +\infty$ 和 $\dot{A}(t) \to +\infty$. 所以，存在 $t_0 \geqslant 1$ 使得 $A(t) > 0$ 和 $\dot{A}(t) > 0 (t \geqslant t_0)$. (5.2.13)两端同乘以 $2\dot{A}(t)$，并使用(5.2.8)，有

$$
\frac{d}{\mathrm{d}t}[\dot{A}^2(t) + A^2(t)] \geqslant C_0t^{1-p}\frac{d}{\mathrm{d}t}A^{\frac{p+3}{2}}(t) + W(t), \ t \geqslant t_0 \qquad (5.2.14)
$$

其中 $C_0 = \dfrac{2^{3-p}k_0}{p+3}$，以及

$$
W(t) = (-4E_0t + 2\dot{A}(0))(-E_0t^2 + \dot{A}(0)t + A(0) - 2E_0)
$$

由(5.2.14)可得

$$
\frac{d}{\mathrm{d}t}[t^{p-1}(\dot{A}^2(t) + A^2(t)) - C_0A^{\frac{p+3}{2}}(t)] \geqslant t^{p-1}W(t), \ t \geqslant t_0 \qquad (5.2.15)
$$

(5.2.15)式在 (t_0, t) 上积分，有

$$
\begin{aligned}
&t^{p-1}(\dot{A}^2(t) + A^2(t)) - C_0A^{\frac{p+3}{2}}(t) \\
&\quad \geqslant \int_{t_0}^t W(\tau)\mathrm{d}\tau + t^{p-1}[\dot{A}^2(t_0) + A^2(t_0)] - C_0A^{\frac{p+3}{2}}(t_0), \ t \geqslant t_0 \qquad (5.2.16)
\end{aligned}
$$

显然，当 $t \to +\infty$ 时，(5.2.16) 的右端趋于 $\to +\infty$，因而，存在 $t_1 \geqslant t_0$，使得当 $t \geqslant t_1$ 时，(5.2.16) 的右端非负。则

$$t^{p-1}(\dot{A}^2(t)+A^2(t)) \geqslant C_0 A^{\frac{p+3}{2}}(t),\ t \geqslant t_1.$$

上述微分不等式两端开平方，便得到

$$(\dot{A}(t)+A(t)) \geqslant C_1 t^{\frac{p-1}{2}} A^{\frac{p+3}{4}}(t),\ t \geqslant t_1. \tag{5.2.17}$$

其中 $C_1=\sqrt{C_0}$.

考虑下面 Bernoulli 方程的初值问题：

$$\begin{cases}(\dot{Y}(t)+Y(t)) \geqslant C_1 t^{\frac{p-1}{2}} Y^{\frac{p+3}{4}}(t),\ t>t_1,\\ Y(t_1)=A(t_1).\end{cases} \tag{5.2.18}$$

容易得到问题 (5.2.18) 的解

$$\begin{aligned}Y(t) &= e^{t_1-t}\{A^{\frac{1-p}{4}}(t_1)-\frac{(p-1)C_1}{4}\int_{t_1}^{t}\tau^{\frac{1-p}{2}}e^{\frac{1-p}{4}(t-\tau)}\mathrm{d}\tau\}^{\frac{4}{1-p}}\\ &= e^{t_1-t}A(t_1)Z^{\frac{4}{1-p}},\ t \geqslant t_1,\end{aligned} \tag{5.2.19}$$

其中

$$Z(t)=1-\frac{(p-1)C_1}{4}A^{\frac{1-p}{4}}(t_1)\int_{t_1}^{t}\tau^{\frac{1-p}{2}}e^{\frac{1-p}{4}(t-\tau)}\mathrm{d}\tau.$$

显然，$Z(t_1)=1>0$ 且

$$\begin{aligned}J(t) &= \frac{(p-1)C_1}{4}A^{\frac{1-p}{4}}(t_1)\int_{t_1}^{t}\tau^{\frac{1-p}{2}}e^{\frac{1-p}{4}(t-\tau)}\mathrm{d}\tau\\ &\geqslant \frac{(p-1)C_1}{4}A^{\frac{1-p}{4}}(t_1)(t_1+1)^{\frac{1-p}{2}}\int_{t_1}^{t_1+1}e^{\frac{1-p}{4}(\tau-t_1)}\mathrm{d}\tau\\ &= C_1A^{\frac{1-p}{4}}(t_1)(t_1+1)^{\frac{1-p}{2}}(1-e^{\frac{1-p}{4}}),\ t \geqslant t_1+1.\end{aligned} \tag{5.2.20}$$

由 (5.2.9) 式可知，当 $t \to +\infty$ 时，

$$A^{\frac{1-p}{4}}(t)(t+1)^{\frac{1-p}{2}} \geqslant \{\frac{-E_0t^2+\dot{A}(0)t+A(0)}{(t+1)^2}\}^{\frac{1-p}{4}} \to (-E_0)^{\frac{p-1}{4}}.$$

取 t_1 充分大，使得

$$A^{\frac{1-p}{4}}(t_1)(t_1+1)^{\frac{1-p}{2}} \geqslant \frac{1}{2}(-E_0)^{\frac{p-1}{4}}.$$

由 (5.2.20) 和主要定理的假定条件 (2) 可知

$$J(t) \geqslant \frac{C_1}{2}(1 - e^{\frac{1-p}{4}})(-E_0)^{\frac{p-1}{4}},\ t \geqslant t_1 + 1.$$

因此

$$Z(t) = 1 - J(t) \leqslant 0,\ t \geqslant t_1 + 1.$$

利用 $Z(t)$ 的连续性，使用中值定理，存在常数 $t_1 < T_1 \leqslant t_1 + 1$ 使得 $Z(T_1) = 0$. 因而，当 $t \to T_1^-$ 时，$Y(t) \to +\infty$。

利用引理 5.1.1 可得，$A(t) \geqslant Y(t)$，$t \geqslant t_1 + 1$。因此，当 $t \to T_1^-$ 时，$A(t) \to +\infty$。主要定理得证。

参考文献

[1] 庄蔚，杨桂通. 孤波在非线性弹性杆中的传播[J]. 应用数学和力学,1986, 7:571 -581.

[2] 张善元，庄蔚. 非线性弹性杆中的应变孤波[J]. 力学学报，1988, 20(1):58 -67.

[3] P. Rosenau. Dynamics of nonlinear mass - spring chain near the continumlimt[J]. Phys. Lett. 1986, 118A: 222 -227.

[4] P. Rosenau. Dynamics of dense lattices[J]. Physical Review B, 1987, 36(11) :5868 -5876.

[5] Chen Guowang, Yang Zhijian. Existence and non - existence of global solutions for a class of nonlinear wave equation[J]. Mathematical Methods in Applied Sciences, 2000, 23: 615 -631.

[6] Chen Guowang, Wang Shubin. Existence and non - existence of global solutions for nonlinear hyperbolic equations of higher order [J]. Comment Math. Univ. Carolinae, 1995, 36 (3): 475 -487.

[7] V. K. Kalantarov , O. A. Ladyzhenskaya. The occurrence of collapse of quasilinear equations of parabolic and hyperbolic types [J]. J. Sov. Math. 1978, 10:53 -70.

[8] H. A. Levine, L. E. Payne. Nonexistence of global weak solu-

tions for classes of nonlinear wave and parabolic equations[J]. J. Math. Anal. Appl. 1976, 55:329 - 334.

[9] H. A. Levine. Instability and nonexistence of global solutions to nonlinear wave equations of the form $Pu_{tt} = -Au + F(u)$[J]. Trans American Math. Soc. 1974, 192 :1 - 21.

[10] H. A. Levine. Some additional remarks on the nonexistence of global solutions to nonlinear wave equations[J]. SIAM J. Math. Anal. 1974, 5:138 - 146.

[11] O. A. Ladyzhenskaya. Attractors for Semigroups and Evolution Equations[M]. London:Cambridge Univ. Press, 1991.

[12] Li Yuesheng. Basic inequality and uniqueness of the solution for differential equations (I)[J]. Acta Sci. Natur. Univ. Jilin, 1960, 1: 7 - 22.

第六章　一类非线性双曲型方程整体解的不存在性

第一节　引言

本文继续研究第五章研究的方程的如下的初边值问题

$$u_{tt}-u_{xx}+au_{xxxx}-bu_{xxtt}=g(u_x)_x,\ x\in(0,\ l),\ t\in(0,\ T),\tag{6.1.1}$$

$$u_x(0,\ t)=u_x(l,\ t)=0,\ u_{xxx}(0,\ t)=u_{xxx}(l,\ t)=0,\ t\in(0,\ T),\tag{6.1.2}$$

$$u(x,\ 0)=u_0(x),\ u_t(x,\ 0)=u_1(x),\ x\in[0,\ l].\tag{6.1.3}$$

其中 $u(x,\ t)$ 表示未知函数，$a>0$，$b>0$ 是常数，$g(x)$ 是给定的非线性函数，$u_0(x)$ 和 $u_1(x)$ 是已知的满足边界条件(5.1.2)的初值函数。下标 t 和 x 分别表示对求 t 和 x 偏导数。

第二节　问题(6.1.1)－(6.1.3)的整体解

对问题(6.1.1)－(6.1.3)，有下面的定理6.2.1和定理6.2.2：

定理6.2.1　假定 $u_0(x)\in H^4[0,\ l]$，$u_1(x)\in H^3[0,\ l]$，并且 $u_0(x)$，$u_1(x)$ 满足边界条件(6.1.2)；$g\in C^2(R)$，并且存在常数 γ，使得对任意的 $s\in R$，都有 $g'(s)\geqslant\gamma$. 则问题(6.1.1)－(6.1.3)有唯一的整体广义解。

$$u(x,\ t)\in C([0,\ T];H^4(0,\ l))\cap C^1([0,\ T];H^3(0,\ l))\cap C^2([0,\ T];H^2(0,\ l)).$$

定理6.2.2　假定定理6.2.1的条件成立。如果 $u_0(x)\in$

$H^6[0, l]$, $u_1(x) \in H^5[0, l]$，并且 $g \in C^3(R)$ 和 $g''(0) = 0$. 则问题(6.1.1)－(6.1.3)有唯一的整体古典解

$$u(x, t) \in C([0, T]; C^4(0, l)) \cap C^1([0, T]; C^3(0, l)) \cap C^2([0, T]; C^2(0, l)).$$

这两个定理可以利用第三章的方法证明。

第三节　问题(6.1.1)－(6.1.3)的整体解的不存在性

为了讨论解的爆破，需要用到下面的引理：

引理 6.2.1　(Jensen 不等式) 设 $\varphi(x)$ 定义在 (a, b) 上，$\varphi(x) \in [a_1, b_1]$，其中 a, b, a_1, b_1 是有限数或 ∞，$f(x)$ 是 (a_1, b_1) 上的连续的凸函数。$q(x) \in L^1[a, b]$，且 $q(x) \geqslant 0$，则有

$$f\left(\frac{\int_a^b \varphi(x) q(x) \mathrm{d}x}{\int_a^b q(x) \mathrm{d}x}\right) \leqslant \frac{\int_a^b f(\varphi(x)) q(x) \mathrm{d}x}{\int_a^b q(x) \mathrm{d}x}$$

在右端有限时成立。

定理 6.2.2　设 $u(x, t)$ 是问题(6.1.1)－(6.1.3)的广义解或古典解。假设下面的条件满足：

(1) $\frac{\pi}{2\ell}\int_0^l u_0(x) \cos\frac{\pi x}{\ell} \mathrm{d}x = \alpha \geqslant \left\{\frac{\pi^2 l^2 + a\pi^4}{l^4}\left(\frac{l}{\pi}\right)^{q+1} \delta^{-1}\right\}^{\frac{1}{q-1}} > 0$, $\frac{\pi}{2\ell}\int_0^l (x) \cos\frac{\pi x}{\ell} \mathrm{d}x = \beta > 0$；

(2) $g(s)$ 是凸函数，$g(0) = 0$，$g(s) \geqslant \delta s^q$，其中 $\delta > 0$ 是实数，$q > 1$ 是个偶数。

则问题(6.1.1)－(6.1.3)的解在有限时刻 T_0 爆破，即

$$\lim_{t \to T_0^-} \sup_{x \in (0, l)} |u(x, t)| = +\infty.$$

证明　令

$$\Phi(t) = \frac{\pi}{2\ell}\int_{\Omega} u(x,\ t)\cos\frac{\pi x}{\ell}\mathrm{d}x.$$

方程(6.1.1)两端同乘以 $\frac{\pi}{2\ell}\cos\frac{\pi x}{\ell}$，利用分部积分，可得

$$(1+\frac{b\pi^2}{\ell^2})\ddot{\Phi}+(\frac{\pi^2}{\ell^2}+\frac{b\pi^4}{\ell^4})\Phi = \frac{\pi}{2\ell}\int_{\Omega} g(u_x)_x\cos\frac{\pi x}{\ell}\mathrm{d}x. \quad (6.2.1)$$

这里及后面的"·"表示对 t 求导.

由于 $f(s)$ 是偶凸函数，利用分部积分和 Jensen 不等式，有

$$\begin{aligned}\frac{\pi}{2\ell}\int_0^l g(u_x)_x\cos\frac{\pi x}{\ell}\mathrm{d}x &= \frac{\pi^2}{2\ell^2}\int_0^l g(u_x)\sin\frac{\pi x}{\ell}\mathrm{d}x \\ &\geqslant \frac{\pi^2}{\ell^2}g(-\frac{\pi^2}{2\ell^2}\int_0^l u\cos\frac{\pi x}{\ell}\mathrm{d}x). \\ &\geqslant \delta(\frac{\pi}{\ell})^{q+1}\Phi(t)^q,\ t>0. \end{aligned} \quad (6.2.2)$$

把(6.2.2)式代入(6.2.1)，可得

$$(1+\frac{b\pi^2}{\ell^2})\ddot{\Phi}+(\frac{\pi^2}{\ell^2}+\frac{b\pi^4}{\ell^4})\Phi \geqslant \delta(\frac{\pi}{\ell})^{q+1}\Phi(t)^q,\ t>0 \quad (6.2.3)$$

且 $\Phi(0)=\alpha>0$，$\dot{\Phi}(0)=\beta>0$.

由于 $\Phi(0)=\alpha>0$，$\dot{\Phi}(0)=\beta>0$，利用 $\Phi(t)$ 的连续性，存在 t 的右邻域 $(0,\rho)$，使得当 $t\in(0,\rho)$ 时，总有 $\dot{\Phi}(t)>0$，因此 $\Phi(t)>\Phi(0)>0$.

接下来证明 $\dot{\Phi}(t)>0$ 对任意 t 都成立. 采用反证法。假设这个结论不正确，则存在 $t_0>0$，使得当 $0<t<t_0$ 时，$\dot{\Phi}(t)>0$，但 $\dot{\Phi}(t_0)=0$。因而 $\Phi(t)$ 在 $[0,t_0)$ 上是严格单增的，且 $\Phi(t)\geqslant\alpha$，$t\in[0,t_0]$，这与 $\Phi(t_0)=0$ 矛盾。

因此，对 $\forall t>0$，$\Phi(t)>\Phi(0)>0$ 成立。由(6.2.3)得

$$\ddot{\Phi}(t)\geqslant\frac{\ell^2\pi^2+a\pi^4}{\ell^2(\ell^2+b\pi^2)}\Phi(t)[\frac{\ell^4}{\ell^2\pi^2+a\pi^4}\delta(\frac{\pi}{\ell})^{q+1}\Phi(t)^{q-1}-1]$$

$$\geqslant \frac{\ell^2\pi^2 + a\pi^4}{\ell^2(\ell^2 + b\pi^2)}\alpha[\frac{\ell^4}{\ell^2\pi^2 + a\pi^4}\delta(\frac{\pi}{\ell})^{q+1}\alpha^{q-1} - 1] \geqslant 0.$$

因此 $\dot{\Phi}(t)$ 在 $[0, t_0]$ 上是单增的，这与 $\dot{\Phi}(t_0) = 0$ 矛盾。这表明 $\dot{\Phi}(t) > 0$ 和 $\forall t > 0$，$\Phi(t) > \Phi(0) > 0$。

(6.2.3) 的两端同乘以 $2\dot{\Phi}(t)$，并在 $[0, t]$ 上积分，可得

$$\begin{aligned}(\dot{\Phi}(t))^2 &\geqslant \beta^2 - \frac{\ell^2\pi^2 + a\pi^4}{\ell^2(\ell^2 + b\pi^2)}(\Phi(t)^2 - \alpha^2) \\ &\quad + \frac{\ell^2}{\ell^2 + b\pi^2}\frac{2\delta}{q+1}(\Phi(t)^{q+1} - \alpha^{q+1}) \\ &= J(\Phi(t)).\end{aligned} \tag{6.2.4}$$

注意到 $J(\alpha) = \beta^2 > 0$，以及

$$\begin{aligned}J'(\Phi(t)) &= 2\delta\frac{\ell^2}{\ell^2 + b\pi^2}(\frac{\pi}{l})^{q+1} - 2\frac{\ell^2\pi^2 + a\pi^4}{\ell^2(\ell^2 + b\pi^2)}\Phi(t) \\ &> 2\frac{\ell^2\pi^2 + a\pi^4}{\ell^2(\ell^2 + b\pi^2)}\alpha[\frac{\delta\ell^4}{\ell^2\pi^2 + a\pi^4}(\frac{\pi}{l})^{q+1}\alpha^{q-1} - 1] \\ &\geqslant 0,\end{aligned}$$

容易知道 $J(\Phi(t)) > J(\Phi(0)) = J(\alpha) = \beta^2 > 0$，$t > 0$。

(6.2.4)d 的两边开方，可以得到

$$\begin{aligned}\dot{\Phi}(t) \geqslant \Big[&\frac{\ell^2}{\ell^2 + b\pi^2}\frac{2\delta}{q+1}(\frac{\pi}{l})^{q+1}(\Phi(t)^{q+1} - \alpha^{q+1}) \\ &- \frac{\ell^2\pi^2 + a\pi^4}{\ell^2(\ell^2 + b\pi^2)}(\Phi(t)^2 - \alpha^2) + \beta^2\Big]^{\frac{1}{2}},\ t > 0\end{aligned}$$

这表明 $\Phi(t)$ 的存在区间 $[0, T_1)$ 是有限的，即

$$\begin{aligned}T_1 \leqslant \int_\alpha^{+\infty}\Big\{&\frac{\ell^2}{\ell^2 + b\pi^2}\frac{2\delta}{q+1}(\frac{\pi}{l})^{q+1}(s^{q+1} - \alpha^{q+1}) \\ &- \frac{\ell^2\pi^2 + a\pi^4}{\ell^2(\ell^2 + b\pi^2)}(s^2 - \alpha^2) + \beta^2\Big\}^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}s < +\infty.\end{aligned}$$

所以在有限时 $T_0 \leqslant T_1$，$\Phi(t)$ 产生奇性。

显然，由于 $\Phi(t) > 0$，因而

$$\Phi(t) = \left|\Phi(t)\right| \leqslant \sup_{x\in(0,l)} \left|u(x,t)\right|,$$

从而当 $t \to T_0^-$ 时，

$$\sup_{x\in(0,l)} \left|u(x,t)\right| \to +\infty.$$

定理 6.2.2 证毕。

第四节 定理 6.2.2 的一个应用

本节中，应用定理 6.2.2 讨论如下第五章给出具体模型方程的如下的初边值问题

$$u_{tt} - u_{xx} + au_{xxxx} - bu_{xxtt} = c(u_x^2)_x,\ x \in (0,l),\ t \in (0,T), \tag{6.3.1}$$

$$u_x(0,t) = u_x(l,t) = 0,\ u_{xxx}(0,t) = u_{xxx}(l,t) = 0,\ t \in (0,T), \tag{6.3.2}$$

$$u(x,0) = u_0(x),\ u_t(x,0) = u_1(x),\ x \in [0,l]. \tag{6.3.3}$$

利用压缩映射原理[12]或者 Galerkin 方法[13]，可以证明问题(6.3.1)－(6.3.3)存在唯一的局部广义解和局部古典解。利用定理 6.2.2，有如下的结果：

定理 6.3.1 设 $u(x,t)$ 是问题(6.3.1)－(6.3.3)的广义解或古典解，并且 $c > 0$. 当

$$\frac{\pi}{2l}\int_0^l u_0(x)\cos\frac{\pi x}{l}\mathrm{d}x = \alpha \geqslant \frac{\pi^2 l^2 + a\pi^4}{l^4}\left(\frac{l}{\pi}\right)^3$$

和

$$\frac{\pi}{2l}\int_0^l u_1(x)\cos\frac{\pi x}{l}\mathrm{d}x = \beta > 0$$

成立时，问题(6.3.1)－(6.3.3)的解 $u(x,t)$ 在有限时刻 T_0 爆破，即

$$\lim_{t\to T_0^-}\sup_{x\in(0,l)}\left|u(x,t)\right| = +\infty.$$

证明 容易知道如下关于积分的式子成立

$$T_2 \leqslant \int_{\alpha}^{+\infty} \left\{ \frac{\ell^2}{\ell^2 + b\pi^2} \frac{2}{3} \left(\frac{\pi}{l}\right)^3 (s^3 - \alpha^3) - \frac{\ell^2 \pi^2 + a\pi^4}{\ell^2(\ell^2 + b\pi^2)} (s^2 - \alpha^2) + \beta^2 \right\}^{-\frac{1}{2}} \mathrm{d}s < +\infty .$$

利用定理6.2.2，知道存在有限时刻 $T_0 < T_2$，使得

$$\lim_{t \to T_0^-} \sup_{x \in (0, l)} \left| u(x, t) \right| = +\infty$$

参考文献

[1] 庄蔚，杨桂通. 孤波在非线性弹性杆中的传播[J]. 应用数学和力学，1986，7:571 -581.

[2] 张善元，庄蔚. 非线性弹性杆中的应变孤波[J]. 力学学报，1988，20(1)：58 -67.

[3] P. Rosenau. Dynamics of nonlinear mass - spring chain near the continumlimt[J]. Phys. Lett. 1986, 118A: 222 -227.

[4] P. Rosenau. Dynamics of dense lattices[J]. Physical Review B, 1987, 36(11):5868 -5876.

[5] Chen Guowang, Yang Zhijian. Existence and non - existence of global solutions for a class of nonlinear wave equation[J]. Mathematical Methods in Applied Sciences. 2000, 23: 615 -631.

[6] Chen Guowang, Wang Shubin. Existence and non - existence of global solutions for nonlinear hyperbolic equations of higher order [J]. Comment Math. Univ. Carolinae, 1995, 36 (3): 475 -487.

[8] V. K. Kalantarov , O. A. Ladyzhenskaya. The occurrence of collapse of quasilinear equations of parabolic and hyperbolic types [J]. J. Sov. Math. 1978, 10: 53 -70.

[9] H. A. Levine, L. E. Payne. Nonexistence of global weak solu-

tions for classes of nonlinear wave and parabolic equations[J]. J. Math. Anal. Appl. 1976, 55:329 - 334.

[9] H. A. Levine. Instability and nonexistence of global solutions to nonlinear wave equations of the form $Pu_{tt} = -Au + F(u)$ Trans [J]. American Math. Soc. 1974, 192: 1 - 21.

[10] H. A. Levine. Some additional remarks on the nonexistence of global solutions to nonlinear wave equations[J]. SIAM J. Math. Anal. 1974, 5: 138 - 146.

[11] O. A. Ladyzhenskaya. Attractors for Semigroups and Evolution Equations[J]. London: Cambridge Univ. Press, 1991.

[12] W. J. Hrusa. Global existence and asymptotic stability for a semilinear hyperbolic Volterra equation with large initial data [J]. SIAM J. Math. Anal, 1985, 16 (1): 110 - 134.

[13] J. L. Lions. "Queques m\'ethods de r\'esoution des probl\'ems aux limites non lin\'eaires"[M]. Paris: Dunod Gauthier - Villars, 1969.

第七章　一类非线性波方程初边值问题解的爆破

第一节　引言

本章研究如下初边值问题

$$u_{tt}-u_{xxt}-u_{xx}-(\sigma(u_x^2)u_x)_x+\delta\left|u_t\right|^{p-1}u_t=\mu\left|u\right|^{q-1}u,\ 0<t<T,\tag{7.1.1}$$

$$u(0,t)=u(1,t)=0,\ 0\leqslant t\leqslant T,\tag{7.1.2}$$

$$u(x,0)=u_0(x),\ u_t(x,0)=u_1(x),\ 0<x<1,\tag{7.1.3}$$

其中，$\delta,\mu>0$，$p\geqslant1$，$q>1$ 是常数，$u(x,t)$ 表示未知函数，$\sigma(x)$ 是给定的非线性函数，$u_0(x)$ 和 $u_1(x)$ 是已知的初值函数。下标 t 和 x 分别表示对求 t 和 x 偏导数。

作为一个修正的拟线性波方程模型，Greenberg 和 Maccamy 给出了方程(7.1.1)在 $\delta=\mu=0$ 时的情形[1]，此时这个模型方程对大初值具有整体光滑解。此后，对于方程(7.1.1)及其相关方程的小初值的情况，许多作者研究了方程整体解的存在性，并讨论了方程解的渐近性质[2-5]。当 $\sigma=\mu=0$ 并且 $\delta=1$ 时，Nakao 研究了方程(7.1.1)多维情形时解的存在性和衰减性质[6]。

近来，文献[7]的作者研究了(7.1.1)多维情况。当初值充分小时，他们给出了问题(7.1.1)-(7.1.3)的强解的存在性，并且建立了非线性源项具有形式 $\sigma(s)=\dfrac{1}{\sqrt{1+s^2}}$ 时的相关结果，但是作者没有证明问题解的唯一性。

本章采用如下记号：$\|\cdot\|_p$ 表示函数空间 $L^p(0,1)(1\leqslant p\leqslant$

∞)的范数，$\|\cdot\| = \|\cdot\|_2$；$\|\cdot\|_{H^m}$ 表示 Sobolev 空间 $H^m(0, 1)$(m 是正整数)的范数；$\|\cdot\|_{C^m[0,1]}$ 表示函数空间 $C^m[0, 1]$ 的范数；$(\cdot, \cdot)$ 表示 $L^2(0, 1)$ 中的内积。

本章的安排是这样的：在第二章中证明问题(7.1.1)-(7.1.3)的局部广义解和局部古典解的存在唯一性；在第二章中证明问题(7.1.1)-(7.1.3)的整体解的不存在性。

第二节　局部解的存在性

本节将利用 Galerkin 方法证明问题(7.1.1)-(7.1.3)局部解的存在性。

设 $\{y_i(x)\}$ 是由特征值问题

$$\begin{cases} y'' + \lambda y = 0, 0 < x < 1, \\ y(0) = y(1) = 0 \end{cases}$$

对应特征值 $\lambda_i(i = 1, 2, \cdots)$ 的特征函数构成的 $L^2(0, 1)$ 中的一组标准正交基。

设问题(7.1.1)-(7.1.3)的 Galerkin 近似解为

$$u_m(x, t) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_{mi}(t) y_i(x), \tag{7.2.1}$$

其中 $\alpha_{mi}(t)(i = 1, 2, \cdots, N)$ 是待定系数，m 是正整数。设初边值函数 $u_0(x)$ 和 $u_1(x)$ 可表示为

$$u_0(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \varphi_i y_i(x),\ u_1(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \varphi_i y_i(x),$$

其中 φ_i 和 $\varphi_i(i = 1, 2, \cdots)$ 是常数。将近似解 $u_m(x, t)$ 以初值函数 $u_0(x)$ 和 $u_1(x)$ 的近似

$$u_{0m}(x) = \sum_{i=1}^{m} \varphi_i y_i(x),\ u_{1N}(x) = \sum_{i=1}^{m} \varphi_i y_i(x)$$

分别代入(7.1.1)和(7.1.3)，并对 x 在 $(0, 1)$ 上积分得

$$\ddot{\alpha}_{ms} + \lambda_s \dot{\alpha}_{ms} + \lambda_s \alpha_{ms} = ((\sigma(u_{mx}^2) u_{mx})_x - \delta \left| u_{mt} \right|^{p-1} u_{mt}$$

$$+\mu\left|u_m\right|^{q-1}u_m,\ y_s), \tag{7.2.2}$$

$$\alpha_{ms}(0)=\varphi_s,\ \dot{\alpha}_{ms}(0)=\varphi_s,\ s=1,2,\cdots,m, \tag{7.2.3}$$

其中 $\dot{\alpha}_{ms}=\dfrac{d}{dt}\alpha_{ms}(t)$.

引理 7.2.1 假定下列条件成立：

1. 对任意的 $s\geqslant 0$, $\sigma\in C^r$, $\left|\sigma(s)\right|\leqslant Ks^l$, 其中 $K>0$ 是常数, $l\geqslant 1$ 和 $r\geqslant 1$ 都是自然数；

2. p 是奇数或 $p\geqslant r$ 是偶数, q 是奇数或 $q\geqslant r$ 是偶数；

3. $\lim\limits_{m\to\infty}E_m(t)=A=\sum\limits_{s=1}^{\infty}\{(1+\lambda_s+\lambda_s^{r+1})\varphi_s^2+(1+\lambda_s^r)\phi_s^2\}+1<\infty$, $\qquad$ (7.2.4)

其中

$$E_m(t)=\sum_{s=1}^{m}\{(1+\lambda_s+\lambda_s^{r+1})\alpha_{ms}^2+(1+\lambda_s^r)\dot{\alpha}_{ms}^2\}+1, \tag{7.2.5}$$

则常微分方程组初值问题(7.2.2), (7.2.3)在 $[0,t_1]$ 上存在古典解 $\alpha(t)=(\alpha_{m1}(t),\alpha_{m2}(t),\cdots,\alpha_{mm}(t))$, 满足

$$E_m(t)\leqslant\frac{A}{(1-\frac{\rho-1}{2}K_0t_1A^{\frac{\rho-1}{2}})^{\frac{2}{\rho-1}}}=M \tag{7.2.6}$$

在区间 $[0,t_1]$ 上一致有界, 其中 $\rho>1$, $t_1>0$, $K_0>0$ 是与 m 和 M 都无关的常数。

证明 根据常微分方程组解的理论, 问题(7.2.2), (7.2.3)的局部解是存在的。记解的最大存在区间是 $[0,T_m)$, 下面对解的估计将表明 T_m 有不依赖于 m 的正的下界。

方程组(7.2.2)两端乘以 $(1+\lambda_s^2)\dot{\alpha}_{ms}(t)$, 然后两端对 $s=1,2,\cdots,m$ 求和, 得

$$\frac{d}{dt}E_m(t)+2\|u_{mxt}\|^2+2\|u_{mx^{r+1}t}\|^2$$

$$= 2((\sigma(u_{mx}^2)u_{mx})_x - \delta\left|u_{mt}\right|^{p-1}u_{mt}$$
$$+ \mu\left|u_m\right|^{q-1}u_m,\ u_{mt} + (-1)^r u_{mx^{2r}t}) + 2(u_m,\ u_{mt}).$$
$$(7.2.7)$$

由(7.2.5)式可以得到

$$E_m(t) = \|u_m\|^2 + \|u_{mx}\|^2 + \|u_{mx^{r+1}}\|^2 + \|u_{mt}\|^2 + \|u_{mx^r t}\|^2 + 1, \qquad (7.2.8)$$

利用 Sobolev 空间嵌入定理，

$$\|u_m\|_{C^r[0,1]} \leqslant C\|u_m\|_{H^{r+1}[0,1]} \leqslant C(E_m(t))^{\frac{1}{2}}, \qquad (7.2.9)$$

$$\|u_{mt}\|_{C^{r-1}[0,1]} \leqslant C\|u_{mt}\|_{H^r[0,1]} \leqslant C(E_m(t))^{\frac{1}{2}}, \qquad (7.2.10)$$

这里及下面出现的 C 表示与 m 和 t 都无关的常数。

利用 Holder 不等式，由(7.2.9)和关于 σ 的假定，得

$$\left|\int_0^1(\sigma(u_{mx}^2)u_{mx})_x u_{mt}\mathrm{d}x\right|$$
$$= \left|\int_0^1[2(\sigma'(u_{mx}^2)u_{mx}^2)u_{mxx} + \sigma(u_{mx}^2)u_{mxx}]u_{mt}\mathrm{d}x\right|$$
$$\leqslant \|u_{mx}\|_{C[0,1]}^{2l}\|u_{mxx}\|\|u_{mt}\| \leqslant C(E_m(t))^{l+1}.$$
$$(7.2.11)$$

利用分部积分和 Holder 不等式，可得

$$\left|2(-1)^r\int_0^1(\sigma(u_{mx}^2)u_{mx})_x u_{mx^{2r}t}\mathrm{d}x\right|$$
$$= \left|(-1)^{2r-1}\int_0^1(\sigma(u_{mx}^2)u_{mx})_{x^r}u_{mx^{r+1}t}\mathrm{d}x\right|$$
$$\leqslant \frac{1}{3}\|u_{mx^{r+1}t}\|^2 + C\|(\sigma(u_{mx}^2)u_{mx})_{x^r}\|^2. \qquad (7.2.12)$$

通过直接计算，利用微分方法可以得到

$$\|(\sigma(u_{mx}^2)u_{mx})_{x^r}\| \leqslant C\|u_m\|_{H^{r+1}}^{2l+1} \leqslant C(E_m(t))^{\frac{2l+1}{2}}.$$
$$(7.2.13)$$

由(7.2.12)和(7.2.13)可得

$$\left|2(-1)^r\int_0^1(\sigma(u_{mx}^2)u_{mx})_x u_{mx^{2r}t}\mathrm{d}x\right|$$
$$\leqslant\frac{1}{3}\|u_{mx^{r+1}t}\|^2+C(E_m(t))^{2l+1}. \tag{7.2.14}$$

利用 Holder 不等式，(7.2.5)，(7.2.9)和(7.2.10)，得到

$$\left|(-\delta|u_{mt}|^{p-1}u_{mt},u_{mt})\right|\leqslant\delta\|u_{mt}\|_{C[0,1]}^{p-1}\|u_{mt}\|^2$$
$$\leqslant C(E_m(t))^{\frac{p+1}{2}}, \tag{7.2.15}$$

$$\left|(\mu|u_m|^{q-1}u_m,u_{mt})\right|\leqslant\mu\|u_m\|_{C[0,1]}^{q-1}\|u_m\|\|u_{mt}\|^2$$
$$\leqslant C(E_m(t))^{\frac{q+1}{2}}, \tag{7.2.16}$$

$$\left|2(-\delta|u_{mt}|^{p-1}u_{mt},(-1)^r u_{mx^{2r}t})\right|$$
$$=\left|2\delta\int_0^1(|u_{mt}|^{p-1}u_{mt})_{x^{r-1}}u_{mx^{r+1}t}\mathrm{d}x\right|$$
$$\leqslant 2\delta\|(|u_{mt}|^{p-1}u_{mt})_{x^{r-1}}\|\|u_{mx^{r+1}t}\|$$
$$\leqslant\frac{1}{3}\|u_{mx^{r+1}t}\|^2+C\|(|u_{mt}|^{p-1}u_{mt})_{x^{r-1}}\|^2$$
$$\leqslant\frac{1}{3}\|u_{mx^{r+1}t}\|^2+C\|u_{mt}\|_{H^{r-1}}^{2p}$$
$$\leqslant\frac{1}{3}\|u_{mx^{r+1}t}\|^2+C(E_m(t))^p. \tag{7.2.17}$$

$$\left|2\mu(|u_m|^{q-1}u_m,(-1)^{r-1}u_{mx^{2r}t})\right|$$
$$=\left|2\mu((-1)^{2r-1}(|u_m|^{q-1}u_m)_{x^{2r-1}},u_{mx^{r+1}t})\right|$$
$$\leqslant 2\mu\|(|u_m|^{q-1}u_m)_{x^{r-1}}\|\|u_{mx^{r+1}t}\|$$
$$\leqslant\frac{1}{3}\|u_{mx^{r+1}t}\|^2+C\|u_{mt}\|_{H^{r-1}}^{2q}$$
$$\leqslant\frac{1}{3}\|u_{mx^{r+1}t}\|^2+CE_m(t)^q. \tag{7.2.18}$$

注意到

$$\left|2(u_m,u_{mt})\right|\leqslant 2\|u_m\|\|u_{mt}\|\leqslant 2E_m(t), \tag{7.2.19}$$

取 $\rho=\max\{4l+1,2p-1,2q-1\}$，并且把(7.2.11)，(7.2.14) - (7.2.19)代入(7.2.7)，有

$$\frac{d}{dt}E_m(t)\leqslant K_0E_m(t)^{\frac{\rho+1}{2}}. \tag{7.2.20}$$

其中 $K_0>0$ 是与 m 和 t 无关的常数。

对任意的 $t\in(0,T_m)$ 由(7.2.20)可得

$$E_m(t)\leqslant\frac{E_m(0)}{\left[1-\frac{\rho-1}{2}K_0(E_m(0))^{\frac{\rho-1}{2}}t\right]^{\frac{2}{\rho-1}}}\leqslant\frac{A}{\left(1-\frac{\rho-1}{2}K_0A^{\frac{\rho-1}{2}}t\right)^{\frac{2}{\rho-1}}}.$$

如果 t_1 满足

$$0<1-\frac{\rho-1}{2}K_0A^{\frac{\rho-1}{2}}t_1\leqslant a,$$

其中 $0<a<1$，则(7.2.6)对 $t\in[0,t_1]$ 成立。上式表明

$$\frac{2(1-a)}{\rho-1}K_0A^{\frac{\rho-1}{2}}\leqslant t_1<\frac{2}{(\rho-1)K_0A^{\frac{\rho-1}{2}}}, \tag{7.2.21}$$

其中 $\frac{2(1-a)}{\rho-1}K_0A^{\frac{\rho-1}{2}}>0$ 是常数。

(7.2.21)表明 T_m 不依赖于 m 的正的下界。引理得证。

引理 7.2.2 假定引理7.2.1的条件成立并且 $r\geqslant2$ 则问题(7.1.1) - (7.1.3)的近似解 $u_m(x,t)$ 满足

$$\|u\|_{H^{r+1}}+\|u_{mt}\|_{H^r}+\|u_{mtt}\|_{H^{r-2}}\leqslant C,\ \forall t\in[0,t_1]. \tag{7.2.22}$$

证明 由(7.2.5)和(7.2.6)得

$$\|u\|_{H^{r+1}}+\|u_{mt}\|_{H^r}\leqslant C,\ \forall t\in[0,t_1]. \tag{7.2.23}$$

(7.2.2)的两端同乘以 $(1+\lambda_s^{r-2})\ddot{\alpha}_{ms}$，然后对 $s=1,2,\cdots,m$ 求和，得

$$\sum_{s=1}^{m}(1_s+\lambda_s^{r-2})\ddot{\alpha}_{ms}^2+\sum_{s=1}^{m}(\lambda_s+\lambda_s^{r-1})\ddot{\alpha}_{ms}\alpha_{ms}+\sum_{s=1}^{m}(\lambda_s+\lambda_s^{r-1})\ddot{\alpha}_{ms}\dot{\alpha}_{ms}$$
$$=((\sigma(u_{mx}^2)u_{mx})_x+\mu\left|u_m\right|^{q-1}u_m-\delta\left|u_{mt}\right|^{p-1}u_{mt},u_{mtt}$$

$$+(-1)^{r-2}u_{mx^{2(r-2)}tt}),$$

即是

$$\|u_{mtt}\|^2+\|u_{mx^{2(r-2)}tt}\|^2=(u_{mx^rt}+u_{mx^r}+(\sigma(u_{mx}^2)u_{mx})_{x^{r-1}}$$
$$-\delta(|u_{mt}|^{p-1}u_{mt})_{x^{r-2}}+\mu(|u_m|^{q-1}u_m)_{x^{r-2}},u_{mx^{r-2}tt})$$
$$+(u_{mxx}+u_{mxxt}+(\sigma(u_{mx}^2)u_{mx})_x-\delta|u_{mt}|^{p-1}u_{mt}$$
$$+\mu|u_m|^{q-1}u_m,u_{mtt}),\tag{7.2.24}$$

利用 Sobolev 嵌入定理，由(7.2.23)可得

$$\|u_m\|_{C^r[0,1]}+\|u_{mt}\|_{C^{r-1}[0,1]}\leqslant C,\ \forall t\in[0,t_1]\tag{7.2.25}$$

应用 Cauchy 不等式，注意到(7.2.25)和(7.2.23)，通过直接计算可，由(7.2.24)可得

$$\|u_{mtt}\|_{H^{r-2}}\leqslant C,\ \forall t\in[0,t_1],\tag{7.2.26}$$

(7.2.23)和(7.2.26)表明(7.2.22)成立。证毕。

引理 7.2.3 假定引理 7.2.1 的条件满足，且 $r\geqslant 4$，则问题(7.1.1)-(7.1.3)的近似解 $u_m(x,t)$ 有估计式

$$\|u_{mt^3}\|_{H^{r-4}}\leqslant C,\ \forall t\in[0,t_1].\tag{7.2.27}$$

证明(7.2.2)式关于 t 求导，得到

$$(u_{mt^3}-u_{mx^2t}-u_{mx^2t^2},y_s)=((\sigma(u_{mx}^2)u_{mx})_{xt}-\delta(|u_{mt}|^{p-1}u_{mt})_t$$
$$+\mu(|u_m|^{q-1}u_m)_t,y_s).\tag{7.2.28}$$

(7.2.28)两端同乘以 $\ddot{\alpha}_{ms}$，并且对 $s=1,2,\cdots,m$ 求和，有

$$\|u_{mt^3}\|^2=(u_{mx^2t}+u_{mx^2t^2}+(\sigma(u_{mx}^2)u_{mx})_{xt}-\delta(|u_{mt}|^{p-1}u_{mt})_t$$
$$+\mu(|u_m|^{q-1}u_m)_t,u_{mt^3}),\tag{7.2.29}$$

利用 Holder 不等式，Cauchy 不等式，(7.2.22)和(7.2.29)式，有

$$\|u_{mt^3}\|^2\leqslant C,\ \forall t\in[0,t_1].\tag{7.2.30}$$

(7.2.28)两端同乘以 $(-1)^{r-4}\lambda_s^{r-4}\dddot{\alpha}_{ms}$，然后对 $s=1,2,\cdots,m$ 求

和，得到

$$\| u_{mx^{r-4}t^3} \|^2 = (u_{mx^{r-2}t} + u_{mx^{r-2}t^2} + (\sigma(u_{mx}^2)u_{mx})_{x^{r-3}t} - \delta(|u_{mt}|^{p-1}u_{mt})_{x^{r-4}t} + \mu(|u_m|^{q-1}u_m)_{x^{r-4}t}, u_{mx^{r-4}t^3}). \tag{7.2.31}$$

利用 Cauchy 不等式和(7.2.22)，由(7.2.31)知道

$$\| u_{mx^{r-4}t^3} \|^2 \leqslant C, \ \forall t \in [0, t_1]. \tag{7.2.32}$$

(7.2.30)和(7.2.32)表明(7.2.27)。引理得证。

定理 7.2.1 假定引理 7.2.2 的条件成立，且 $r \geqslant 3$. 则问题(7.1.1)－(7.1.3)有唯一的局部广义解 $u(x, t)$ 满足

$$u(x, t) \in L^2(0, t_1; H^{r+1} \cap H_0^1(0, 1)),$$
$$u_t(x, t) \in L^2(0, t_1; H^r \cap H_0^1(0, 1)),$$
$$u_{tt}(x, t) \in L^2(0, t_1; H^{r-2} \cap H_0^1(0, 1))$$

和等式

$$\int_0^{t_1}\int_0^1 (u_{tt} - u_{xxt} - u_{xx} - (\sigma(u_x^2)u_x)_x + \delta|u_t|^{p-1}u_t - \mu|u|^{q-1}u)\psi \mathrm{d}x\mathrm{d}t = 0, \forall \psi \in L^2(0, t_1; L^2(0, 1)). \tag{7.2.33}$$

当 $r \geqslant 5$ 时，问题(7.1.1)－(7.1.3)有唯一的局部古典解。

证明 当 $r \geqslant 3$ 时，由引理 7.2.2 的(7.2.22)，利用 Sobolev 嵌入定理，得

$$\| u_m \|_{C^3[0,1]} + \| u_{mt} \|_{C^2[0,1]} + \| u_{mtt} \|_{C[0,1]} \leqslant C, \ \forall t \in [0, t_1], \tag{7.2.34}$$

利用弱紧性原理，Ascoli－Arzela 定理，以及估计式(7.2.22)($r=3$)和(7.2.34)，存在函数 $u(x, t)$ 和 $\{u_m(x, t)\}$ 的子序列(还记为 $\{u_m(x, t)\}$)使得

当 $m \to \infty$ 时，$\{u_m(x, t)\}$，$\{u_{mt}(x, t)\}$，$\{u_{mtt}(x, t)\}$ 分别在 $L^2(0, t_1; H^4 \cap H_0^1(0, 1))$，$L^2(0, t_1; H^3 \cap H_0^1(0, 1))$ 和 $L^2(0, t_1; H_0^1(0, 1))$ 中弱收敛于 $u(x, t)$，$u_t(x, t)$ 和 $u_{tt}(x, t)$；

$\{u_m(x,t)\}$, $\{u_{mx}(x,t)\}$, $\{u_{mt}(x,t)\}$ 分别在 $[0,t_0]\times[0,1]$ 上一直收敛于 $u(x,t)$, $u_x(x,t)$ 和 $u_t(x,t)$.

容易知道，当 $m\to\infty$ 时，下面的两个收敛在 $[0,t_0]\times[0,1]$ 上一致成立：

$$\left|u_{mt}\right|^{p-1}u_{mt}\to\left|u_t\right|^{p-1}u_t,$$

$$\left|u_m\right|^{q-1}u_m\to\left|u\right|^{q-1}u.$$

由上述的收敛性知道，$u(x,t)$ 是问题(7.1.1)－(7.1.3)的局部解。因此，当 $r\geqslant 3$ 时，问题(7.1.1)－(7.1.3)存在广义的局部解 $u(x,t)$，并且这个解具有定理 7.2.1 所陈述的正则性。

下面证明局部广义解的唯一性。

设 $u_1(x,t)$ 和 $u_2(x,t)$ 是问题(7.1.1)－(7.1.3)的两个广义解。令 $u(x,t)=u_1(x,t)-u_2(x,t)$. 则 $u(x,t)$ 满足

$$u_{tt}-u_{xxt}-u_{xx}=(\sigma(u_{1x}^2)u_{1x})_x-(\sigma(u_{2x}^2)u_{2x})_x-\delta\left|u_{1t}\right|^{p-1}u_{1t}+\delta\left|u_{2t}\right|^{p-1}u_{2t}+\mu\left|u_1\right|^{q-1}u_1-\mu\left|u_2\right|^{q-1}u_2,\tag{7.2.35}$$

$$u(0,t)=u(1,t)=0,$$

$$u(x,0)=u_t(x,0)=0,$$

(7.2.35)的两端同乘以 $2u(x,t)$ 并且同时加上 $2uu_t$，然后在 $[0,1]$ 上积分，得

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\left[\|u\|^2+\|u_t\|^2+\|u_x\|^2+\|u_{xt}\|^2\right]\\
&=-2\int_0^1\left[\sigma(u_{1x}^2)u_{1x}-\sigma(u_{2x}^2)u_{2x}\right]u_{xt}dx\\
&\quad-2\delta\int_0^1\left[\left|u_{1t}\right|^{p-1}u_{1t}-\left|u_{2t}\right|^{p-1}u_{2t}\right]u_tdx\\
&\quad+2\mu\int_0^1\left[\left|u_1\right|^{q-1}u_1-\mu\left|u_2\right|^{q-1}u_2\right]u_tdx+2\int_0^1uu_tdx\\
&=-2\int_0^1\left[\sigma'((u_{2x}+\theta_1(u_{1x}-u_{2x}))^2\left|u_{2x}+\theta_1(u_{1x}-u_{2x})\right|^2\right.
\end{aligned}$$

$$+\sigma(\left|u_{2x}+\theta_1(u_{1x}-u_{2x})\right|^2)]u_x u_{xt}\mathrm{d}x$$

$$=-2\delta p\int_0^1\left|u_{2t}+\theta_2(u_{1t}-u_{2t})\right|^{p-1}u_t^2\mathrm{d}x$$

$$+2\mu q\int_0^1\left|u_2+\theta_3(u_1-u_2)\right|^{q-1}uu_t\mathrm{d}x+2\int_0^1 uu_t\mathrm{d}x$$

$$\leqslant C(\|u\|^2+\|u_t\|^2+\|u_x\|^2)+\frac{1}{2}\|u_{xt}\|^2,$$

其中 $0<\theta_1,\theta_2,\theta_3<1$. 由 Gronwall 不等式可得

$$\|u\|^2+\|u_t\|^2+\|u_x\|^2=0,\ \forall t\in[0,t_1],$$

这表明 $u_1(x,t)=u_2(x,t)$. 广义解的唯一性得证。

类似地，可以证明如果 $q\geqslant 5$，则问题(7.1.1)－(7.1.3)有唯一的局部古典解 $u(x,t)$，并且满足定理 7.2.1 所表述的正则性。定理得证。

第三节　解的爆破

引理 7.3.1　假定 $u_0\in L^{q+1}(0,1)$，$u_1\in L^2(0,1)$ 且 $\int_0^{u_{0x}^2}\sigma(s)\mathrm{d}s\in L^2(0,1)$，则问题(7.1.1)－(7.1.3)的广义解或古典解满足能量等式

$$E(t)=E(0),\tag{7.3.1}$$

其中

$$E(t)=\frac{1}{2}\|u_t\|^2+\frac{1}{2}\|u_x\|^2+\frac{1}{2}\int_0^1\int_0^{u_x^2}\sigma(s)\mathrm{d}s\mathrm{d}x$$
$$-\frac{\mu}{q+1}\|u\|_{q+1}^{q+1}+\frac{1}{2}\int_0^t(\|u_{x\tau}(\cdot,\tau)\|^2$$
$$+\delta\|u_\tau(\cdot,\tau)\|_{p+1}^{p+1})\mathrm{d}\tau.$$

证明　(7.1.1)的两端同乘以 u_t，然后再 $[0,1]$ 上积分，得

$$\frac{d}{\mathrm{d}t}[\frac{1}{2}\|u_t\|^2+\frac{1}{2}\|u_x\|^2+\frac{1}{2}\int_0^1\int_0^{u_x^2}\sigma(s)\mathrm{d}s\mathrm{d}x$$

$$-\frac{\mu}{q+1}\|u\|_{q+1}^{q+1}]\|u_{xt}\|^2+\delta\|u_t\|_{p+1}^{p+1}=0,$$

这表明(7.3.1)式成立。证毕。

记

$$E_1(t)=\frac{1}{2}\|u_t\|^2+\frac{1}{2}\|u_x\|^2+\frac{1}{2}\int_0^1\int_0^{u_x^2}\sigma(s)\mathrm{d}s\mathrm{d}x$$

$$-\frac{\mu}{q+1}\|u\|_{q+1}^{q+1}.$$

定理 7.3.1 假定下列条件成立。

(1) $u_0\in H^2\cap H_0^1(0,1)$, $u_1\in L^2(0,1)$;

(2) $\sigma(s)s\leqslant A_1\int_0^s\sigma(\tau)\mathrm{d}\tau$, $\sigma(s)\geqslant 0$ 和 $\sigma(s)\geqslant A_2s^{\xi}$ 对 $s\geqslant 0$ 成立，其中 $A_1>1$, $A_2>0$ 和 $\xi\geqslant 1$ 是常数;

(3) $q>\max\{p,2A_1-1\}$;

(4) 记 $\alpha=\frac{1}{p+1}-\frac{1}{q+1}$, $H(0)=-E_1(0)\geqslant\max\left\{1,\frac{\mu}{q+1},\frac{\mu}{q+1}\left(\frac{1}{\widehat{C}}\right)^{q+1},\left(\frac{K_1(q+1)}{2\mu(q+1-2A_1)}\right)^{\frac{1}{\alpha}}\right\}$,

其中

$$K_1=2\delta\frac{p}{p+1}\left(\frac{\mu}{q+1}\right)^{\alpha}$$

以及 $\widehat{C}$

是 $W_0^{1,2(\xi+1)}$ 嵌入 $L^q(0,1)$ 的嵌入常数。则问题(7.1.1)-(7.1.3)的解 $u(x,t)$ 在有限时刻 t_0 爆破，即

$$\lim_{t\to t_0^-}\|u\|_{q+1}=+\infty.$$

证明 考虑函数

$$\Phi(t)=H^{1-\alpha}(t)+\varepsilon F'(t),\tag{7.3.2}$$

其中

$$H(t)=-E_1(t),\tag{7.3.3}$$

$$F(t) = \|u\|^2 + \frac{1}{2}\int_0^t \| u_x(\cdot, \tau) \|^2 d\tau,\ t > 0,$$

$\varepsilon > 0$ 是后面给出的一个小参数。

由能量等式可得

$$H'(t) = \| u_{xt} \|^2 + \delta \| u_t \|_{p+1}^{p+1}, \tag{7.3.4}$$

这表明 $H(t)$ 是增函数并且满足

$$0 < H(0) \leqslant H(t) \leqslant \frac{\mu}{q+1}\|u\|_{q+1}^{q+1} \leqslant \frac{\mu}{q+1}\widehat{C}^{q+1} \| u_x \|_{2(\xi+1)}^{q+1}, \tag{7.3.5}$$

因而，

$$\|u\|_{q+1} \geqslant (\frac{q+1}{\mu}H(0))^{\frac{1}{q+1}} \geqslant 1, \tag{7.3.6}$$

$$\| u_x \|_{2(\xi+1)} \geqslant (\frac{q+1}{\mu})^{\frac{1}{q+1}} \widehat{C}^{-1}H(0)^{\frac{1}{q+1}} \geqslant 1, \tag{7.3.7}$$

先注意到等式

$$\frac{d}{dt}\Phi(t) = (1-\alpha)H^{-\alpha}(t)H'(t) + \varepsilon F''(t),$$

由于

$$\begin{aligned}
F''(t) &= 2\| u_t \|^2 + 2\int_0^1 u u_{tt} dx + 2\int_0^1 u_x u_{xt} dx \\
&= 2\| u_t \|^2 + 2\int_0^1 u(u_{tt} - u_{xxt}) dx \\
&= 2\| u_t \|^2 + 2\int_0^1 u[(\sigma(u_x^2)u_x)_x + u_{xx} \\
&\quad - \delta \left| u_t \right|^{p-1} u_t + \mu \left| u \right|^{q-1} u] dx \\
&= 2\| u_t \|^2 - \left| 2 \right| u_x \|^2 + 2\mu \|u\|_{q+1}^{q+1} \\
&\quad - 2\delta\int_0^1 u \left| u_t \right|^{p-1} u_t dx - 2\int_0^1 (\sigma(u_x^2) u_x^2 dx \\
&\geqslant 2\| u_t \|^2 - \left| 2 \right| u_x \|^2 + 2\mu \|u\|_{q+1}^{q+1}
\end{aligned}$$

$$-2\delta\int_0^1 u\left|u_t\right|^{p-1}u_t\mathrm{d}x-2A_1\int_0^1\int_0^{u_x^2}\sigma(s)\mathrm{d}s\mathrm{d}x$$

由(7.3.3)可以得到

$$\begin{aligned}F''(t)\geqslant{}&2\|u_t\|^2-2\|u_x\|^2+2\mu\|u\|_{q+1}^{q+1}-2\delta\int_0^1 u\left|u_t\right|^{p-1}u_t\mathrm{d}x\\&+2A_1\Big(H(t)+\|u_t\|^2+\|u_x\|^2-\frac{2\mu}{q+1}\|u\|_{q+1}^{q+1}\Big)\\={}&4A_1H(t)+2(1+A_1)\|u_t\|^2+2(A_1-1)\|u_x\|^2\\&+2\mu\frac{q+1-2A_1}{q+1}\|u\|_{q+1}^{q+1}-2\delta\int_0^1 u\left|u_t\right|^{p-1}u_t\mathrm{d}x.\end{aligned}\tag{7.3.8}$$

现在估计(7.3.8)右端的最后一项。利用 Holder 不等式和假设 $p<q$，有

$$\begin{aligned}\left|2\delta\int_0^1 u\,|u_t|^{p-1}u_t\mathrm{d}x\right|&\leqslant 2\delta\|u_t\|_{p+1}^{p}\|u\|_{p+1}\\&\leqslant 2\delta\|u_t\|_{p+1}^{p}\|u\|_{q+1}\end{aligned}$$

注意到 $\|u\|_{q+1}=\|u\|_{q+1}^{\frac{q+1}{p+1}}\|u\|_{q+1}^{1-\frac{q+1}{p+1}}$，得

$$\begin{aligned}\left|2\delta\int_0^1 u\,|u_t|^{p-1}u_t\mathrm{d}x\right|&\leqslant 2\delta\|u_t\|_{p+1}^{p}\|u\|_{q+1}^{\frac{q+1}{p+1}}\|u\|_{q+1}^{1-\frac{q+1}{p+1}}\\&\leqslant 2\delta\|u_t\|_{p+1}^{p}\|u\|_{q+1}^{\frac{q+1}{p+1}}\left(\|u\|_{q+1}^{-1}\right)^{\frac{q+1}{p+1}-1}.\end{aligned}$$

利用 $E_1(t)$ 的定义和 $H(t)=-E_1(t)$，考虑到关于 $\sigma(s)\geqslant0$ 对 $s\geqslant0$ 成立的假定，容易知道

$$\|u\|_{q+1}^{-1}\leqslant\left[\frac{q+1}{\mu}H(t)\right]^{-\frac{1}{(q+1)}},$$

由此知道

$$\begin{aligned}\left(\|u\|_{q+1}^{-1}\right)^{\frac{q+1}{p+1}-1}&\leqslant\left[\frac{\mu}{(q+1)H(t)}\right]^{\frac{1}{p+1}-\frac{1}{(q+1)}}\\&=\left[\frac{\mu}{(q+1)}\right]^{\frac{1}{p+1}-\frac{1}{(q+1)}}\left[H(t)\right]^{\frac{1}{(q+1)}-\frac{1}{p+1}}\\&=\left[\frac{\mu}{(q+1)}\right]^{\alpha}\left[H(t)\right]^{-\alpha},\end{aligned}$$

所以，

$$\left|2\delta\int_0^1 u\,|u_t|^{p-1}u_t\mathrm{d}x\right| \leqslant 2\delta\left[\frac{\mu}{(q+1)}\right]^{\alpha}[H(t)]^{-\alpha}\,\|u_t\|_{p+1}^{p}\,\|u\|_{q+1}^{\frac{q+1}{p+1}}. \tag{7.3.9}$$

利用 Young 不等式和假定条件 $p<q$，得到

$$\begin{aligned}\|u_t\|_{p+1}^{p}\,\|u\|_{q+1}^{\frac{q+1}{p+1}} &\leqslant \frac{1}{p+1}\|u\|_{q+1}^{q+1}+\frac{p}{p+1}\|u_t\|_{p+1}^{p+1}\\ &\leqslant \frac{p}{p+1}\left(\|u\|_{q+1}^{q+1}+\|u_t\|_{p+1}^{p+1}\right)\\ &\leqslant \frac{p}{p+1}\left(\|u\|_{q+1}^{q+1}+\delta^{-1}H'(t)\right).\end{aligned} \tag{7.3.10}$$

把(7.3.10)代入(7.3.9)，得到

$$\begin{aligned}&\left|2\delta\int_0^1 u\,|u_t|^{p-1}u_t\mathrm{d}x\right|\\ &\leqslant 2\delta\frac{p}{p+1}\left[\frac{\mu}{(q+1)}\right]^{\alpha}[H(t)]^{-\alpha}\left(\|u\|_{q+1}^{q+1}+\delta^{-1}H'(t)\right)\\ &\leqslant K_1[H(0)]^{-\alpha}\|u\|_{q+1}^{q+1}+K_1\delta^{-1}[H(t)]^{-\alpha}H'(t),\end{aligned} \tag{7.3.11}$$

其中 $K_1=2\delta\frac{p}{p+1}\left[\frac{\mu}{(q+1)}\right]^{\alpha}$.

由(7.3.8)和(7.3.11)可得

$$\begin{aligned}F''(t) \geqslant{}& 4A_1H(t)+2(1+A_1)\|u_t\|^2+2(A_1-1)\|u_x\|^2\\ &+\left[2\mu\frac{q+1-2A_1}{q+1}-K_1(H(0))^{-\alpha}\right]\|u\|_{q+1}^{q+1}\\ &-K_1\delta^{-1}[H(t)]^{-\alpha}H'(t)\\ ={}& 4A_1H(t)+2(1+A_1)\|u_t\|^2+2(A_1-1)\|u_x\|^2\\ &+K_2\|u\|_{q+1}^{q+1}-K_1\delta^{-1}[H(t)]^{-\alpha}H'(t),\end{aligned}$$

其中当

$$H(0)>\left(\frac{K_1(q+1)}{2\mu(q+1-2A_1)}\right)\frac{1}{\alpha}$$

成立时，

$$K_2=2\mu\frac{q+1-2A_1}{q+1}-K_1(H(0))^{-\alpha}>0.$$

因而

$$\frac{d}{dt}\Phi(t) \geqslant (1-\alpha-\varepsilon K_1\delta^{-1})H^{-\alpha}(t)H'(t)+4\varepsilon A_1 H(t)$$
$$+2\varepsilon(1+A_1)\|u_t\|^2+2\varepsilon(A_1-1)\|u_x\|^2+\varepsilon K_2\|u\|_{q+1}^{q+1}, \tag{7.3.12}$$

取 ε 充分小，满足

$$1-\alpha-\varepsilon K_1\delta^{-1}>0,$$

由(7.3.12)可得

$$\frac{d}{dt}\Phi(t) \geqslant K_3(H(t)+\|u_t\|^2+\|u_x\|^2+\|u\|_{q+1}^{q+1}), \tag{7.3.13}$$

其中 $K_3>0$ 是常数。

(7.3.13)表明 $\Phi(t)$ 是增函数，所以选择 ε 充分小，使得

$$H(0)^{-\alpha}+\varepsilon(2\int_0^1 u_0u_1\mathrm{d}x+\|u_{0x}\|^2)>0,$$

从而对任意 $t>0$，有

$$\Phi(t)>\Phi(0)>0.$$

接下来证明

$$\Phi'(t)\geqslant C\Phi(t)^{\beta}, t>0, \tag{7.3.14}$$

其中 C 是正常数，$\beta=\dfrac{1}{1-\alpha}$，注意到 $0<\alpha<\dfrac{1}{2}$，有 $1<\beta<2$。

为了证明(7.3.14)，考虑如下两种情况：

情形 1. $F'(t)\leqslant 0$。则

$$\Phi(t)^{\beta}=(H^{1-\alpha}(t)+\varepsilon F'(t))^{\beta}\leqslant H(t), \tag{7.3.15}$$

由(7.3.13) 和(7.3.15)知道(7.3.14)成立。

情形 2. $F'(t)>0$，由 Holder 不等式得

$$(\varepsilon F'(t))^{\beta}=\varepsilon^{\beta}(2(u,u_t)+\|u_x\|^2)^{\beta}$$
$$\leqslant \varepsilon^{\beta}\left\{2\|u\|_{q+1}\left(\int_0^1|u_t|^{\frac{q+1}{q}}\mathrm{d}x\right)^{\frac{q}{q+1}}+\|u_x\|^2\right\}^{\beta}$$
$$\leqslant \varepsilon^{\beta}\left\{2\|u\|_{q+1}\left(\int_0^1|u_t|^{\frac{q+1}{q}\cdot\frac{2q}{q+1}}\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_0^1 1^{\frac{2q}{q-1}}\mathrm{d}x\right)^{\frac{q-1}{2(q+1)}}\right.$$

$$+\ \|u_x\|^2\}^\beta$$
$$\leqslant \varepsilon^\beta(2\|u\|_{q+1}\|u_t\| + \|u_x\|^2)^\beta$$
$$\leqslant C_1\varepsilon^\beta(2\|u\|_{q+1}^\beta\|u_t\|^\beta + \|u_x\|^{2\beta}), \tag{7.3.16}$$

取

$$\lambda = \frac{2(1-\alpha)}{1-2\alpha}, \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda'} = 1,$$

由 Young 不等式和(7.3.16)得

$$(\varepsilon F'(t))^\beta \leqslant C_2\varepsilon^\beta(2\|u\|_{q+1}^{\frac{\lambda}{1-q}} + \|u_t\|^{\frac{\lambda'}{1-\alpha}} + \|u_x\|^{\frac{2}{1-\alpha}})$$
$$\leqslant C_2\varepsilon^\beta(2\|u\|_{q+1}^{\frac{2}{1-2\alpha}} + \|u_t\|^2 + \|u_x\|^{\frac{2}{1-\alpha}}). \tag{7.3.17}$$

注意到

$$\alpha = \frac{1}{p+1} - \frac{1}{q+1} \text{和} 1 \leqslant p < q,$$

有

$$0 < \alpha \leqslant \frac{q-1}{2(q+1)},$$

因而

$$0 < \frac{2}{1-2\alpha} \leqslant q+1.$$

利用(7.3.16)可得

$$\|u\|_{q+1}^{\frac{2}{1-2\alpha}} \leqslant \|u\|_{q+1}^{q+1}. \tag{7.3.18}$$

由于对 $s \geqslant 0$, $\sigma(s) \geqslant A_2 s^\xi$ 成立，因此

$$\int_0^1\int_0^{u_x^2}\sigma(s)\,\mathrm{d}s\mathrm{d}x \geqslant A_2\int_0^1\int_0^{u_x^2}s^\xi\,\mathrm{d}s\mathrm{d}x$$
$$= \frac{A_2}{\xi+1}\int_0^1(u_x^2)^{\xi+1}\mathrm{d}x$$
$$= \frac{A_2}{\xi+1}\|u_x\|_{2\xi+2}^{2\xi+2}, \tag{7.3.19}$$

由(7.3.3)可以得到

$$\int_0^1\int_0^{u_x^2}\sigma(s)\,\mathrm{d}s\mathrm{d}x \leqslant \frac{2\mu}{q+1}\|u\|_{q+1}^{q+1}. \tag{7.3.20}$$

(7.3.19)和(7.3.20)表明

$$\| u_x \|_{2\xi+2}^{2\xi+2} \leqslant \frac{2\mu(\xi+1)}{A_2(q+1)} \|u\|_{q+1}^{q+1}, \tag{7.3.21}$$

利用 Holder 不等式，有

$$\| u_x \| \leqslant \| u_x \|_{2\xi+2}, \text{即} \| u_x \|^{\frac{2}{1-\alpha}} \leqslant \| u_x \|_{2\xi+2}^{\frac{2}{1-\alpha}}.$$

注意到(7.3.7)和 $\frac{2}{1-\alpha} \leqslant 2\xi+2$，有

$$\| u_x \|^{\frac{2}{1-\alpha}} \leqslant \| u_x \|_{2\xi+2}^{2\xi+2}, \tag{7.3.22}$$

(7.3.21)和(7.3.22)表明

$$\| u_x \|^{\frac{2}{1-\alpha}} \leqslant \frac{2\mu(\xi+1)}{A_2(q+1)} \|u\|_{q+1}^{q+1}. \tag{7.3.23}$$

由(7.3.17)、(7.3.18)和(7.3.23)得

$$(\varepsilon F'(t))^{\beta} \leqslant C_4 \varepsilon^{\beta}(2\|u\|_{q+1}^{q+1} + \| u_t \|^2).$$

因而

$$\begin{aligned} \Phi(t)^{\beta} &= (H^{1-\alpha}(t) + \varepsilon F'(t))^{\frac{1}{1-\alpha}} \\ &\leqslant C[H(t) + (\varepsilon F'(t))^{\beta}] \\ &\leqslant C_6(H(t) + \|u\|_{q+1}^{q+1} + \| u_t \|^2). \end{aligned} \tag{7.3.24}$$

(7.3.13)和(7.3.24)表明

$$\Phi'(t) \geqslant C_7 \Phi(t)^{\beta},$$

其中 $C_7 > 0$ 是常数。

因此，(7.3.14)总成立。求解(7.3.14)，得到

$$\Phi(t) \geqslant \frac{\Phi(0)}{[1 - C_7(\beta-1)\Phi(0)^{\beta-1}]^{\frac{1}{\beta-1}}},$$

取

$$t_0 \geqslant \frac{1}{C_7(\beta-1)\Phi(0)^{\beta-1}},$$

得到

$$\lim_{t\to t_0^-} \Phi(t) = +\infty.$$

注意到(7.3.2)和(7.3.3)，有

$$\lim_{t\to t_0^-}\|u\|_{q+1} = +\infty.$$

定理7.3.1得证。

参考文献

[1] Greenberg J., On the existence, uniqueness and stability of the equation $\rho x_{tt} = E(X_x)X_{xx} + X_{xxt}$[J]. J. Math. Anal. Appl, 1969, 25: 575 - 591.

[2] Kawashima S. and Shibata Y., Global existence and exponential stability of small solutions to nonlinear viscoelasticity[J]. Comm. Math. Phys., 1992, 148:189 - 208.

[3] Mizohata K. and Ukai S., The global existence, uniqueness of small amplitude solutions to the nonlinear acoustic wave equations [J] J. Math. Kyoto Univ., 1993, 33: 505 - 522.

[4] Matsuyama T. and Ikehata R., On global solutions and energy decay for the wave equations of Kirchhoff type with nonlinear damping terms [J]. J. Math. Anal., Appl., 1996, 204: 729 - 753.

[5] Nakao M., Energy decay for ghe quasilinear wave equation with viscosity[J]. Math. Z., 1995, 219: 289 - 299.

[6] Nakao M., On strong solutions of the quasilinear wave equation with viscosity[J]. Adv. Math. Sci. Appl., 1996, 6:267 - 278.

[7] Park J. Y. and Bae J. J., On the existence of solutions of quasilinear wave equation with viscosity[J]. J. Korean Math. Soc., 2000, 37(3): 339 - 358.

[8] Adams R. A., Sobolev Spaces[M]. New York: Academic Press, 1975.

第八章　一类广义 Boussinesq 型方程解的爆破

第一节　引言

本章讨论如下 Boussinesq 型方程初边值问题

$$u_{tt} + \alpha u_{xxxx} + \beta u_{xxxxtt} = f(u)_{xx},\ 0 < x < 1,\ 0 < t < T, \tag{8.1.1}$$

$$u(0,\ t) = u(1,\ t) = 0,\ u_{xx}(0,\ t) = u_{xx}(1,\ t) = 0,\ 0 \leqslant t < T, \tag{8.1.2}$$

$$u(x,\ 0) = \varphi(x),\ u_t(x,\ 0) = \varphi(x),\ 0 \leqslant x \leqslant 1, \tag{8.1.3}$$

其中 $u(x,\ t)$ 是关于变量 $x \in (0,\ 1)$ 和 $t \in \mathrm{R}^+$ 的函数，$u(x,\ t)$ 是未知函数，$\alpha > 0$，$\beta > 0$ 是常数，$\varphi(x)$ 和 $\varphi(x)$ 是已知的初始函数。

在晶格动力学和水波的研究中都提出了如下的模型方程[1]

$$u_{tt} + \alpha u_{xxxx} + \beta u_{xxxxtt} = \gamma(u^2)_{xx}, \tag{8.1.4}$$

其中，$\alpha > 0$，$\beta > 0$ 和 $\gamma \neq 0$ 是常数。显然方程(8.1.1)是方程(8.1.4)的广义形式，这种方程也被称为 Boussinesq 型方程(简称 Bq 方程)。关于 Boussinesq 型方程的孤立子波解和行波解的研究，已经有大量的结果，具体的可见文献[2－5]及其内的参考文献。另外，文献[6－8]对一些 Bq 型方程的定解问题做了讨论。

本文首先证明问题(8.1.1)－(8.1.3)的局部广义解的存在性与唯一性，然后用凸性方法证明问题解的爆破性质。

文中将分别用 $\|\cdot\|$ 和 $\|\cdot\|_{H^m}$ 表示 $L^2(0,\ 1)$ 和 *Sobobev* 空间 $H^m(0,\ 1)$ 中的范数。

第二节 局部广义解的存在唯一性

本节将利用 Galerkin 方法和紧致性原理证明问题(8.1.1)-(8.1.3)的解的存在性。

设 $\{y_j(x)\}$ 是由特征值问题

$$\begin{cases} y'' + \lambda y = 0,\ 0 < x < 1, \\ y(0) = y(1) = 0 \end{cases}$$

对应特征值 $\lambda_j (j = 1, 2, \cdots)$ 的特征函数构成的 $L^2(0, 1)$ 中的一组标准正交基。

设问题(8.1.1)-(8.1.3)的 Galerkin 近似解为

$$u_N(x, t) = \sum_{j=1}^{N} \mu_{N_j}(t) y_j(x), \tag{8.2.1}$$

其中 $\mu_{N_j}(t) (j = 1, 2, \cdots, N)$ 是待定系数，N 是自然数. 设初边值函数 $\varphi(x)$ 和 $\varphi(x)$ 可表示为

$$\varphi(x) = \sum_{j=1}^{\infty} l_j y_j(x),\ \varphi(x) = \sum_{j=1}^{\infty} \eta_j y_j(x),$$

其中 l_j 和 $\eta_j (j = 1, 2, \cdots)$ 是常数。将近似解 $u_N(x, t)$ 以初值函数 $\varphi(x)$ 和 $\varphi(x)$ 的近似

$$u_{0N}(x) = \sum_{j=1}^{N} l_j y_j(x),\ u_{1N}(x) = \sum_{j=1}^{N} \eta_j y_j(x)$$

分别代入(8.1.1)和(8.1.3)，并对 x 在(0, 1)上积分得

$$(1 + \beta\lambda_s^2)\ddot{\mu}_{Ns} + \alpha\lambda_s^2\mu_{Ns} = (f(u_N)_{xx}, y_s), \tag{8.2.2}$$

$$\mu_{Ns}(0) = l_s,\ \dot{\mu}_{Ns}(0) = \eta_s,\ s = 1, 2, \cdots, N, \tag{8.2.3}$$

其中 $\dot{\mu}_{Ns} = \dfrac{d\mu_{Ns}(t)}{dt}$，$(\cdot, \cdot)$ 表示 $L^2(0, 1)$ 上的内积。

引理 8.2.1 假定 $f \in C^2$ 且 $f^{(j)}(s) \le K_j \left| s \right|^{p+1-j} (j = 0, 1, 2)$，这里 $K_j > 0$ 是常数，p 是正整数。记

$$E_N(t) = \sum_{s=1}^{N} \{(1+\alpha\lambda_s^2+\alpha\lambda_s^4)\dot{\mu}_{Ns}^2 + (1+\lambda_s^2+\beta\lambda_s^2+\beta\lambda_s^4)\mu_{Ns}^2\} + 1, \tag{8.2.4}$$

如果

$$\sum_{s=1}^{\infty} \{(1+\alpha\lambda_s^2+\alpha\lambda_s^4)l_s^2 + (1+\lambda_s^2+\beta\lambda_s^2+\beta\lambda_s^4)\eta_s^2\} + 1 < \infty, \tag{8.2.5}$$

则常微分方程组初值问题(8.2.2)，(8.2.3)在 $[0, t_0]$ 上存在古典解 $\mu(t) = (\mu_{N1}(t), \mu_{N2}(t), \cdots, \mu_{NN}(t))$，并且

$$E_N(t) \leqslant \frac{E}{(1-\frac{p}{2}At_0E^{\frac{p}{2}})^{\frac{2}{p}}} = B \tag{8.2.6}$$

在区间 $[0, t_0]$ 上一致有界，其中 $t_0 > 0$，$A > 0$ 以及界 B 都与 N 无关。

证明 问题(8.2.2)，(8.2.3)是关于 $\mu_{Ns}(t)$，$s = 1, 2, \cdots, N$ 的二阶常微分方程组的初值问题，可以等价地化为 $2N$ 维一阶常微分方程组的初值问题，再注意到 f 的光滑性，局部解的存在是显然的. 记解的最大存在区间是 $[0, t_N)$，下面对解的估计将表明 t_N 有与 N 无关的正的下界。

方程组(8.2.2)两端乘以 $(1+\lambda_s^2)\dot{\mu}_{Ns}$，乘积对 $s = 1, 2, \cdots, N$ 求和，并于两边同时加上 (u_N, u_{Nt})，得

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}E_N(t) &= 2(f(u_N)_{xx}, u_{Nt} + u_{Nx^4t}) + 2(u_N, u_{Nt}) \\ &= 2(f''(u_N)u_{Nx}^2 + f'(u_N)u_{Nxx}, u_{Nt} + u_{Nx^4t}) + 2(u_N, u_{Nt}).\end{aligned} \tag{8.2.7}$$

利用 Sobolev 空间嵌入定理，注意到(8.2.4)式得

$$\| u_N \|_{C^3[0,1]} \leqslant C_0 \| u_N \|_{H^4[0,1]} \leqslant C_1(E_N(t))^{\frac{1}{2}}, \tag{8.2.8}$$

这里及下面出现的 C_i 均表示与 N 无关的常数。

利用 Hölder 不等式及(8.2.4)和(8.2.8)式，有

$$\begin{aligned}&\left|2(f''(u_N)u_{Nx}^2+f'(u_N)u_{Nxx},\ u_{Nt}+u_{Nx^4t})+2(u_N,\ u_{Nt})\right|\\&\leqslant(2K_2\|u_N\|_{C[0,1]}^{p-1}\|u_{Nx}\|_{C[0,1]}\|u_{Nx}\|\\&\quad+2K_1\|u_N\|_{C[0,1]}^{p}\|u_{Nxx}\|)(\|u_{Nt}\|+\|u_{Nx^4t}\|)\\&\quad+2\|u_N\|\|u_{Nt}\|)\\&\leqslant A(E_N(t))^{\frac{p+2}{2}},\end{aligned}\tag{8.2.9}$$

其中 $A>0$ 是不依赖于 N 的常数。

对于 $t\in[0,t_N)$，由(8.2.7)和(8.2.9)知

$$E_N(t)\leqslant\frac{E_N(0)}{[1-\frac{p}{2}At(E_N(0))^{\frac{p}{2}}]^{\frac{2}{p}}}\leqslant\frac{E}{1-\frac{p}{2}AtE^{\frac{p}{2}}},$$

如果 t_0 满足 $0<1-\frac{p}{2}At_0E^{\frac{p}{2}}\leqslant\delta$，其中 $0<\delta<1$，则在区间 $[0,t_0]$ 上，(8.2.6)式成立，且 $\frac{2(1-\delta)}{pAE^{\frac{p}{2}}}\leqslant t_0<\frac{2}{pAE^{\frac{p}{2}}}$，其中 $\frac{2(1-\delta)}{pAE^{\frac{p}{2}}}>0$ 是常数，这表明 t_N 有正下界。引理证毕。

推论 8.2.2 在引理 8.2.1 的条件下，问题(8.1.1)-(8.1.3)的近似解 $u_N(x,t)$ 有估计

$$\|u_N\|_{H^4}+\|u_{Nt}\|_{H^4}+\|u_{Ntt}\|_{H^4}\leqslant C_2,\ t\in[0,t_0].\tag{8.2.10}$$

证明 利用(8.2.6)，并注意到(8.2.4)中 $E_N(t)$ 的表达式，容易知道

$$\|u_N\|_{H^4}+\|u_{Nt}\|_{H^4}\leqslant C_3,\ t\in[0,t_0].\tag{8.2.11}$$

利用 Sobolev 空间的嵌入定理知道，

$$\|u_N\|_{C^3[0,1]}\leqslant C_4,\ t\in[0,t_0].\tag{8.2.12}$$

(8.2.2)的两端同乘以 $(1+\lambda_s^2)\ddot{\mu}_{Ns}$，并对 $s=1,2,\cdots,N$ 求和，得到

$$\sum_{s=1}^{N}(1+\lambda_s^2)(1+\beta\lambda_s^2)\ddot{\mu}_{Ns}^2+\sum_{s=1}^{N}(\alpha\lambda_s{}^2)(1+\lambda_s{}^2)\alpha\mu_{Ns}\ddot{\mu}_{Ns}^2$$
$$=(f(u_N)_{xx},\ u_{Ntt}+u_{Nx^4tt})$$

即

$$\|u_{Ntt}\|^2+(\beta+1)\|u_{Nxxtt}\|^2+\beta\|u_{Nx^4tt}\|^2$$
$$=(f''(u_N)u_{Nx}^2+f'(u_N)u_{Nxx}-\alpha u_{Nx^4}u_{Ntt}+u_{Nx^4tt}).$$
(8.2.13)

利用(8.2.12)，对(8.2.13)的的右端项使用 Young 不等式，并利用(8.2.11)可以得到

$$\|u_{Ntt}\|^2+(\beta+1)\|u_{Nx^2tt}\|^2+\beta\|u_{Nx^4tt}\|^2\leqslant C_5,\ t\in[0,\ t_0].$$
(8.2.14)

由(8.2.11)和(8.2.14)式知道，推论得证。

定理 8.2.3 在引理 8.2.1 的条件下，初边值问题(8.1.1)－(8.1.3)存在唯一的局部广义解 $u(x,\ t)$。

证明 在定理的假定条件下，问题(8.1.1)－(8.1.3)的近似解 $u_N(x,\ t)$ 有估计式(8.2.14)。利用弱紧致性原理和 Ascoli－Arzela 定理知，存在 $\{u_N(x,\ t)\}_{N=1}^{\infty}$ 中的子序列（仍然记为）$\{u_N(x,\ t)\}_{N=1}^{\infty}$ 和函数 $u(x,\ t)$，满足：当 $N\to\infty$ 时，$\{u_{Nx^it^j}(x,\ t)\}_{N=1}^{\infty}(i=0,1,2,3,4;j=1,2)$ 在 $L^2(0,\ t_0;L^2(0,\ 1))$ 中分别弱收敛于 $u(x,\ t)$ 相应的各阶导数 $u_{x^it^j}(i=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4;j=1,\ 2)$，并且 $\{u_{Nx}(x,\ t)\}_{N=1}^{\infty}$ 和 $\{u_{Nxx}(x,\ t)\}_{N=1}^{\infty}$ 分别在 $[0,\ 1]\times[0,\ t_0]$ 上一致收敛于 $u(x,\ t)$ 的相应导数 $u_x(x,\ t)$ 和 $u_{xx}(x,\ t)$。容易知道 $u(x,\ t)$ 是初边值问题(8.1.1)－(8.1.3)的局部广义解。

现在证明局部广义解的唯一性。设 $u_1(x,\ t)$ 和 $u_2(x,\ t)$ 是初边值问题(8.1.1)－(8.1.3)的两个广义解。记

$$U(x,\ t)=u_1(x,\ t)-u_2(x,\ t),$$

则满足

$$U_{tt}+\alpha U_{xxxx}+\beta U_{xxxxtt}=f(u_1)_{xx}-f(u_2)_{xx},\ 0<x<1,\ 0<t<t_0,$$
(8.2.15)

$$U(0,t)=U(1,t)=U_{xx}(0,t)=U_{xx}(1,t)=0,\ 0\leqslant t\leqslant t_0, \tag{8.2.16}$$

$$U(x,0)=U_t(x,0)=0,\ 0\leqslant x\leqslant 1. \tag{8.2.17}$$

方程(8.2.15)两边同乘以 $U_t(x,t)$，并对 x 在(0, 1)上积分，利用分部积分，并利用 Gargliardo – Nirenberg 不等式和 Young 不等式，有

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\left\{\|U(\cdot,t)\|^2+\|U_t(\cdot,t)\|^2+\alpha\|U_{xx}(\cdot,t)\|^2+\beta\|U_{xxt}(\cdot,t)\|^2\right\}\\
&=-2\int_0^1[f'(u_1)u_{1x}-f'(u_2)u_{2x}]U_{xt}\mathrm{d}x+2\int_\Omega UU_t\mathrm{d}x\\
&=-\int_0^1\{[f'(u_1)-f'(u_2)]u_{1x}+f'(u_2)U_x\}U_{xt}\mathrm{d}x+2\int_0^1UU_t\mathrm{d}x\\
&=-\int_0^1\{f''(u_2+\theta(u_1-u_2))Uu_{1x}+f'(u_2)U_x\}U_{xt}\mathrm{d}x+2\int_0^1UU_t\mathrm{d}x\\
&\leqslant C_6(\|U(\cdot,t)\|\,\|U_{xt}(\cdot,t)\|+\|U_x(\cdot,t)\|\,\|U_{xt}(\cdot,t)\|\\
&\quad+\|U(\cdot,t)\|\,\|U_t(\cdot,t)\|)\\
&\leqslant C_7\{\|U(\cdot,t)\|^2\\
&\quad+\|U_t(\cdot,t)\|^2+\|U_{xt}(\cdot,t)\|+\|U_{xx}(\cdot,t)\|^2\\
&\quad+\|U_{xxt}(\cdot,t)\|^2\}.
\end{aligned} \tag{8.2.18}$$

注意到(8.2.17)，利用 Gronwall 不等式，由(8.2.17)得

$$\|U(\cdot,t)\|^2+\|U_t(\cdot,t)\|^2+\alpha\|U_{xx}(\cdot,t)\|^2+\beta\|U_{xxt}(\cdot,t)\|^2=0$$

这表明 $u_1(x,t)=u_2(x,t)$。唯一性得证。定理证毕。

第三节　解的爆破

引理 8.3.1（Jensen 不等式）设 $G(x)$ 定义在 (a,b) 上，$G(x)\in[a_1,b_1]$，其中 a,b,a_1,b_1 是有限数或 ∞，$F(x)$ 是 (a_1,b_1) 上的连续的凸函数。$Q(x)\in L^1[a,b]$，且 $Q(x)\geqslant 0$，则有

$$F\left(\frac{\int_a^b G(x)Q(x)\mathrm{d}x}{\int_a^b Q(x)\mathrm{d}x}\right) \leqslant \frac{\int_a^b F(G(x))Q(x)\mathrm{d}x}{\int_a^b Q(x)\mathrm{d}x}$$

在右端有限时成立。

引理 8.3.2[9] 设 $z(t) \in C^2$ 满足 $\ddot{z}(t) \geqslant h(z)(t \geqslant 0)$，且 $z(0) = \rho > 0$, $\dot{z}(0) = \tau > 0$. 如果对所有的 $s \geqslant \rho$, $h(s) \geqslant 0$, 则在 $\dot{\varphi}(t)$ 的定义域内有 $\dot{\varphi}(t) > 0$ 且成立不等式

$$t \leqslant \int_\rho^{z(t)} [\tau^2 + 2\int_\rho^s h(\xi)d\xi]^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}s.$$

定理 8.3.3 设 $u(x, t)$ 是问题(8.1.1)-(8.1.3)的广义解，假定如下条件满足

(a) $-\frac{\pi}{2}\int_0^1 \varphi(x)\sin\pi x\mathrm{d}x = \rho > 0$, $-\frac{\pi}{2}\int_0^1 \varphi(x)\sin\pi x\mathrm{d}x = \tau > 0$,

(b) $f(s) \in C^2(R)$ 是偶的凸函数且满足

(i) $f(0) = 0$, $f(\rho) - \alpha\pi^2\rho \geqslant 0$;

(ii) 当 $s \to +\infty$ 时, $f(s)$ 增长得足够快，使得积分

$$\bar{T} = \int_\rho^{+\infty} [\tau^2 + \frac{2\pi^2}{1+\beta\pi^4}(\int_\rho^s f(\xi)d\xi - \frac{\alpha\pi^2}{2}s^2) + \frac{\alpha\pi^4\rho^2}{1+\beta\pi^4}]^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}s$$

收敛。则 $\exists T_0 \leqslant \bar{T}$, 使得

$$\lim_{t\to T_0^-}\sup_{x\in(0,1)}\left|u(x, t)\right| = +\infty.$$

证明 记

$$z(t) = -\frac{\pi}{2}\int_0^1 u(x, t)\sin\pi x\mathrm{d}x.$$

方程(8.1.1)两边同乘以 $\frac{\pi}{2}\sin\pi x$, 并在(0, 1)上分，得

$$-\ddot{z}(t) + \frac{\pi}{2}\alpha\int_0^1 u_{xxxx}\sin\pi x\mathrm{d}x + \frac{\pi}{2}\beta\int_0^1 u_{xxxxtt}\sin\pi x\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\int_0^1 f(u)_{xx}\sin\pi x\mathrm{d}x. \quad (8.3.1)$$

注意到 $u(x, t)$ 满足的边界条件，利用分部积分可得

$$\frac{\pi}{2}\alpha\int_0^1 u_{xxxx}\sin\pi x\mathrm{d}x = -\pi^4\alpha z(t), \tag{8.3.2}$$

$$\frac{\pi}{2}\beta\int_0^1 u_{xxxxtt}\sin\pi x\mathrm{d}x = -\pi^4\beta\ddot{z}(t), \tag{8.3.3}$$

$$\frac{\pi}{2}\int_0^1 f(u)_{xx}\sin\pi x\mathrm{d}x = -\frac{\pi^3}{2}\int_0^1 f(u)\sin\pi x\mathrm{d}x. \tag{8.3.4}$$

把(8.3.2)、(8.3.3)、(8.3.4)代入(8.3.1)得到

$$(1+\beta\pi^4)\ddot{z} + \alpha\pi^4 z = \frac{\pi^3}{2}\int_0^1 f(u)\sin\pi x\mathrm{d}x. \tag{8.3.5}$$

利用 Jensen 不等式，注意到关于 f 的假定，知道

$$\frac{\pi^3}{2}\int_0^1 f(u)\sin\pi x\mathrm{d}x \geqslant \frac{\pi^3}{2}\int_0^1 \sin\pi x\mathrm{d}x \times f\left[\frac{\int_0^1 u(x, t)\sin\pi x\mathrm{d}x}{\int_0^1 \sin\pi x\mathrm{d}x}\right]$$

$$= \pi^2 f(-z(t)) = \pi^2 f(z(t)). \tag{8.3.6}$$

由(8.3.5)和(8.3.6)得

$$\ddot{z}(t) \geqslant \frac{\pi^2}{1+\beta\pi^4}[f(z(t)) - \alpha\pi^2 z(t)]. \tag{8.3.7}$$

其中，

$$z(0) = \rho > 0,\ \dot{z}(0) = \tau > 0.$$

首先表明

$$f(s) - \alpha\pi^2 s \geqslant 0,\ s \geqslant \rho$$

成立。事实上，由于 $f \in C^2(R)$ 且是偶的凸函数，则 $f''(s) \geqslant 0$ 且 $f'(0) = 0$。记

$$f_0(s) = f(s) - \alpha\pi^2 s,$$

则

$$f''_0(s) = f''(s) \geqslant 0,$$

因而 $f'_0(s)$ 是单调增函数。由于

$$f_0(0) = f(0) = 0,\ f'_0(0) = f'(0) - \alpha\pi^2 = -\alpha\pi^2 < 0$$

且

$$f_0(\rho) = f(\rho) - \alpha\pi^2\rho \geqslant 0,$$

则 $f_0(s)$ 在 $(0, \rho)$ 内的某个点 s_0 处取得最小值，且 $f'(s_0) = 0$。由于 $f'_0(s)$ 的单调增加性质，对 $s \geqslant s_0$，有 $f'_0(s) \geqslant f'_0(s_0) = 0$ 成立。从而当 $s \geqslant s_0$ 时，$f_0(s)$ 是单增函数。特别的，$f_0(s)$ 在 $[\rho, +\infty)$ 上单增，且

$$f_0(s) \geqslant f_0(\rho) \geqslant 0,$$

因而

$$f(s) - \alpha\pi^2 s \geqslant 0$$

对 $\forall s \geqslant \rho$ 成立。记

$$h(s) = \frac{\pi^2}{1+\beta\pi^4}(f(s) - \alpha\pi^2 s),$$

则当 $s \geqslant \rho$ 时，$h(s) \geqslant 0$。再注意到

$$z(0) = \rho > 0,\ \dot{z}(0) = \tau > 0$$

以及(8.3.7)式，利用引理8.3.2，知：$z(t)$ 在其定义域内 $\dot{z}(t) > 0$，并且

$$t \leqslant \int_\rho^{z(t)} \left[\tau^2 + \frac{2\pi^2}{1+\beta\pi^4}\int_\rho^s (f(\xi)d\xi - \alpha\pi^2\xi)d\xi\right]^{-\frac{1}{2}} ds.$$

因此，在有限时刻 $T_0 \leqslant \tilde{T}$，$z(t)$ 产生奇性，其中

$$\tilde{T} = \int_\rho^{+\infty} \left[\tau^2 + \frac{2\pi^2}{1+\beta\pi^4}\left(\int_\rho^s f(\xi)d\xi - \frac{\alpha\pi^2}{2}s^2\right) + \frac{\alpha\pi^4\rho^2}{1+\beta\pi^4}\right]^{-\frac{1}{2}} ds$$

由于 $\varphi(t) > 0$，从而

$$z(t) \leqslant \sup_{0<x<1} |u(x, t)|,$$

则

$$\lim_{t\to T_0^-} \sup_{x\in(0,1)} |u(x, t)| = +\infty.$$

定理证毕。

参考文献

[1] Rosenau P., Dynamics of dense lattices[J]. Physical Review B,

1987, 36(11): 5868 – 5876.

[2] Samsonov A M. Sokurinskaya E V, On existence of longtitudinal strain solitions in an infinite nonlinearly elastic rod[J]. Soviet Phys Dold, 1988, 4(2): 298 – 300.

[3] Samsonov A M. Nonlinear strain waves in elastic waveguide[A]. In: Jeffrey A, Engel.

[4] A. M. Samsonov. On some exact travelling wave solutions for nonlinear hyperbolic equation [J]. π Pitmann Resarch Notes in Mathematics Series, Longman, 1993, 227: 123 – 132.

[5] A. V. Porubov. Strain solitary waves in an elastic rod with microstructure [J]. Rend. Sem. Mat. Univ. Politec Torino, 2000, 58: 189 – 198.

[6] Guowang Chen. Yanping Wang, Zhancai Zhao, Blow – up of solution of an initial boundary value problem for a damped nonlinear hyperbolic equation[J]. Applied Mathematics Letters 2004, 17: 491 – 497.

[7] Guowang Chen. Yanping Wang, Shubin Wang. Initial boundary value problem of the generalized cubic double dispersion equation [J]. J. Math. Anal. Appl. 2004, 299: 563 – 577.

[8] 王艳萍. 一类非线性波方程整体解的存在性[J]. 数学的实践与认识, 2004, 34(10):153 – 158.

[9] Guowang Chen, Shubin Wang, Hongwei Zhang. The initial boundary value problem for n – dimensional generalized IMBq equation [J]. Chinese Journal of Contemporary Mathematics, 2001, 23(3): 259 – 268.

[10] R. T. Glassey. Blow – up theorems for nonlinear wave equations[J]. Math. Z., 1973, 132: 183 – 203.

第九章 人口问题中的一类广义 Ginzburg - Landau 模型方程的时间周期解

第一节 引言

本章研究如下广义 Ginzburg - Landau 模型方程

$$u_t = -a_1 u_{xxxx} + a_2 u_{xx} + F(u)_{xx} + G(u) + f(x, t),$$
$$0 < x < 1, \ t \in R, \quad (9.1.1)$$

具有边界条件

$$u(0, t) = u(1, t) = u_{xx}(0, t) = u_{xx}(1, t) = 0, \ t \in R \quad (9.1.2)$$

和时间周期条件

$$u(x, t + \omega) = u(x, t), \ 0 \leqslant x \leqslant 1, \ t \in R \quad (9.1.3)$$

的周期问题. 其中 $a_1 > 0$, $a_2 > 0$ 以及 $\omega > 0$ 都是物理常数, $u(x, t)$ 是未知函数, 它是变量 $x \in R$ 和 $t \in R$ 的函数, $u(x, t)$ 表示人口密度, $F(s)$ 和 $G(s)$ 是已知的非线性函数, 其中 $G(s)$ 表示动力项或者反应项, $f(x, t)$ 是给定的人口扰动函数, $f(x, t)$ 关于 t 以 $\omega > 0$ 为周期。

方程(9.1.1)中, 若 $f(x, t) = 0$, 则(9.1.1)是方程

$$u_t = -a_1 \nabla^4 u + a_2 \nabla^2 u + a \nabla^2 u^3 + G(u) \quad (9.1.4)$$

的一维情形时的广义形式. 方程(9.1.4)是 Cohen 和 Murray 于 1981 年研究人口问题中的增长和弥散时提出的[1], 其中, $\nabla = (\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \cdots, \frac{\partial}{\partial x_n})$ 表示梯度算子。

根据 Fick 定律, 维持一种状态, 内部能量是不可或缺的, 由于许多领域中普遍存在的稳定的不均匀状态, 因而保持这种状态

必然存在着必需的梯度能量. 这样，体积 V 内的总能量(能量泛函)为

$$F[n]=\int_{v}\left[g(n)+\frac{1}{2}k(\nabla n)^{2}+\cdots\right]\mathrm{d}x, \qquad (9.1.5)$$

其中 $n(x,t)$ 表示某弥散物种的密度，$g(n)$ 表示均匀状态时 V 的能量密度，其余的项表示梯度能量密度，这种梯度能量在非均匀状态时是相当大的，(9.1.5)是保持各种各样的物理的与几何的数量所必需的被积函数的精确形式[1]。由能量泛函(9.1.5)导出的位势 μ 由下式给出：

$$\mu=\mu(n,\nabla n)=\frac{\delta F}{\delta n}=-k\nabla^{2}n+g'(n),$$

其中 $\frac{\delta F}{\delta n}$ 表示变分微商，因而与位势 μ 成比例的通量 J 为

$$J=-D\nabla\mu(n,\nabla n)=-D\nabla(-k\nabla^{2}n+g'(n)),$$

其中 D 是比例常数。因此

$$\frac{\partial n}{\partial t}=-\mathrm{div}J=-kD\nabla^{4}n+\mathrm{div}(Df''(n)\nabla n). \qquad (9.1.6)$$

注意到关于 $f(n)$ 的基本的 Landau－Ginzburg 假定

$$g(n)=\frac{1}{2}An^{2}+\frac{1}{4}Bn^{4},$$

(9.1.6)式成为

$$\frac{\partial n}{\partial n}=-Dk\nabla^{4}n+DA\nabla^{2}n+DB\nabla^{2}n^{3}, \qquad (9.1.7)$$

引入动力项或反应项，由(9.1.7)式得

$$\frac{\partial n}{\partial t}=-Dk\nabla^{4}n+DA\nabla^{2}n+DB\nabla^{2}n^{3}+G(n),$$

这便是模型方程(9.1.4)。

最后，如果考虑到“一个国家内部，由于不同地区或省市的人口分布的不平衡性，人口迁移政策依然可能是调整人口状态的可行措施，因而预报不同地区的人口发散趋势时，人口迁移函数

依然是必须考虑的重要因素，必须预计到人口迁移函数对人口发展方程解的影响"[2]，引入人口迁移函数$f(x, t)$，人口增长与弥散的模型方程(9.1.4)具有形式

$$u_t = -a_1\nabla^4 u + a_2\nabla^2 u + a\nabla^2 u^3 + G(u) + f(x, t), \tag{9.1.8}$$

本文讨论的模型方程(9.1.1)是(9.1.8)的一维情形的一种更广泛的形式。

对于模型方程(9.1.4)的研究，已经有了不少结果。文献[3]研究了一维方程(9.1.4)的周期边值问题。先将该周期问题转化为一个等价的 Volterra 型积分方程，应用不动点定理，证明了积分方程存在唯一的整体古典解。文献[4, 5]对于一维方程(9.1.4)及其广义形式，证明了初边值问题整体广义解和整体古典解的存在性、唯一性及渐近性质。文献[6]和[7]分别证明了方程(9.1.4)的三维情形的 Cauchy 问题及初边值问题，整体解的存在性、唯一性及渐近性，同时文献[7]又给出了解爆破的充分条件。然而对于模型方程(9.1.1)的周期问题，却没有研究结果。本文用 Galerkin 方法证明时间周期问题(9.1.1) - (9.1.3)解的存在性与唯一性。

本章中使用如下的记号：设X是 Banach 空间，$C_\omega^k(R;X)$表示定义在R上具有直到k阶连续导数的以ω为周期且取值于X的函数构成的集合，其范数为

$$\|u\|_{C_\omega^k(R;X)} = \sup_{0\le t\le\omega}\left\{\sum_{i=1}^{k}\|D_t^i u\|_X\right\},$$

其中$D_t = \frac{\partial}{\partial t}$，$\|\cdot\|_X$表示$X$中的范数。

用$L_\omega^p(R;X)(1\le p\le\infty)$表示定义在$R$上以$\omega$为周期取值于$X$的并且满足

$$\|u\|_{L_\omega^p(R;X)} = \left(\int_0^\omega \|u\|_X^p \mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p}} < \infty \quad (1\le p<\infty),$$

$$\|u\|_{L^\infty_\omega(R;X)} = \text{ess}\sup_{0\leqslant t\leqslant\omega}\|u\|_X < \infty \quad (p<\infty)$$

的可测函数集。

$W^{k,p}_\omega(R;X)$ 表示关于 t 的直到 k 阶的偏导数都属于 $L^p_\omega(R;X)$ 的函数集合. $H^m(0,1)$ 和 $H^1_0(0,1)$ 是通常的 Sobolev 空间; $(\cdot,\cdot)$ 表示 $L^2(0,1)$ 中的内积. 为简单起见，用 $\|\cdot\|_p$ 及 $\|\cdot\|_{H^m}$ 分别表示 $L^p(0,1)$ 和 $H^m(0,1)$ 中的范数，特别地，$\|\cdot\|$ 表示 $\|\cdot\|_2$.

本章安排如下：在第二节中，对问题(9.1.1)－(9.1.3)的近似解进行积分估计；在第三节中，证明问题(9.1.1)－(9.1.3)的解的存在性与唯一性。

第二节　问题(9.1.1)－(9.1.3)的近似解的积分估计

设 $\{y_j(x)\}(j=1,2,\cdots)$ 是特征值问题

$$y''+\lambda y=0,\ y(0)=y(1)=0, \tag{9.2.1}$$

相应于特征值 $\lambda_j(j=1,2,\cdots)$ 的特征函数构成的 $L^2(0,1)$ 中的一标准正交基。

设 $u_N(x,t)=\sum_{j=1}^N\alpha_{Nj}(t)y_j(x)$ 是问题(9.1.1)－(9.1.3)的 Galerkin 近似解，其中 $\alpha_{Nj}(t)(j=1,2,\cdots,N)$ 是待定系数，N 是正整数。根据 Galerkin 方法，$\alpha_{Nj}(t)(j=1,2,\cdots,N)$ 应该满足如下常微分方程组的时间周期问题。

$$(u_{Nt}+a_1u_{Nx^4}-a_2u_{Nxx}-F(u_N)_{xx}-G(u_N),y_j)=(f,y_j), \tag{9.2.2}$$

$$(u_N(x,t+\omega),y_j)=(u_N(x,t),y_j),\ j=1,2,\cdots,N. \tag{9.2.3}$$

为了使用 Leray－Schauder 不动点定理证明问题(9.2.2)，(9.2.3)解 $\alpha_{Nj}(t)(j=1,2,\cdots,N)$ 的存在性，考虑如下带参数 θ

的常微分方程组的时间周期问题。

$$(u_{Nt}+a_1u_{Nx^4}-a_2u_{Nxx},\ y_j)=\theta(F(u_N)_{xx}+G(u_N)+f,\ y_j),\tag{9.2.4}$$

$$(u_N(x,\ t+\omega),\ y_j)=(u_N(x,\ t),\ y_j),$$
$$j=1,\ 2,\ \cdots,\ N,\ 0\leqslant\theta\leqslant1.\tag{9.2.5}$$

首先证明下述引理：

引理 9.2.1 假定下面的条件满足

(1) $F(s)\in C^2(R)$，并且存在常数 $b\geqslant0$ 使得对 $\forall s\in R$，有 $F'(s)\geqslant-b$.

(2) $G(s)\in C^1(R)$，$G(0)=0$，并且存在常数 $d>0$，$b+d<a_2$ 使得对 $\forall s\in R$，有 $G'(s)\leqslant d$.

(3) $f\in C_\omega(R;L^2(0,\ 1))$，记 $M_1=\sup\limits_{0\leqslant t\leqslant\omega}\|f\|$. 则问题 (9.2.4)，(9.2.5) 存在解 $\alpha(t)=(\alpha_{N1}(t),\ \alpha_{N2}(t),\ \cdots,\ \alpha_{NN}(t))\in C_\omega^1[0,\ \omega]$，其中 $C_\omega^1[0,\ \omega]=\{r(t)\,|\,r(t+\omega)=r(t),\ \forall t\in R$ 且 $r(t)\in C^1[0,\ \omega]\}$，并且问题(9.1.1)-(9.1.3)的近似解 $u_N(x,\ t)$ 满足估计式

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant\omega}\|u_N\|^2\leqslant C_0M_1^2,\tag{9.2.6}$$

这里 $C_0>0$ 是与 N 和 M_1 都无关的常数.

证明 (9.2.4)式两端同乘以 $\alpha_{Nj}(t)$，并对 $j=1,\ 2,\ \cdots,\ N$ 求和，利用 Hölder 不等式及 Poincaré 不等式，有

$$\frac{1}{2}\frac{d}{\mathrm{d}t}\|u_N\|^2+a_1\|u_{Nx^2}\|^2+a_2\|u_{Nx}\|^2$$
$$=-\theta_1\int_0^1F'(u_N)u_{Nx}^2\mathrm{d}x+\theta\int_0^1G'(\delta u_N)u_N^2\mathrm{d}x+\theta\int_0^1fu_N\mathrm{d}x$$
$$\leqslant(b+d)\|u_{Nx}\|^2+\|f\|\ \|u_{Nx}\|\tag{9.2.7}$$

其中 $0<\delta<1$. 利用 Cauchy 不等式，由(9.2.7)可得到

$$\frac{d}{\mathrm{d}t}\|u_N\|^2+2a_1\|u_{Nx^2}\|^2+(a_2-b-d)\|u_{Nx}\|^2\leqslant\frac{M_1^2}{a_2-b-d}.\tag{9.2.8}$$

对(9.2.8)式两端在 $[0,\omega]$ 上积分，得

$$\int_0^{\omega}\|u_{Nx}\|^2\mathrm{d}t\leqslant\frac{M_1^2\omega}{(a_2-b-d)^2}. \tag{9.2.9}$$

利用积分中值定理，由(9.2.9)式知：$\exists t_1\in(0,\omega)$，使得

$$\|u_{Nx}(\cdot,t)\|^2\leqslant\frac{M_1^2}{(a_2-b-d)^2}, \tag{9.2.10}$$

对(9.2.8)式两端再在 $[t_1,t+\omega]$($\forall t\in[0,\omega]$) 积分，使用(9.2.10)式和 Poincaré 不等式，得

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant\omega}\|u_N(\cdot,t)\|^2\leqslant\|u_N(\cdot,t_1)\|^2+\frac{2\omega M_1^2}{a_2-b-d}$$

$$\leqslant\frac{2\omega}{(a_2-b-d)^2}\left(a_2-b-d+\frac{1}{2\omega}\right)M_1^2=C_0M_1^2, \tag{9.2.11}$$

这里 $C_0>0$ 是一个与 N 和 M_1 都无关的常数。

接下来，我们利用 Leray－Schauder 不动点定理证明问题(9.2.2)、(9.2.3)的解的存在性。

取基本空间 $B=C_\omega[0,\omega]=\{r(t)\mid\forall t\in R,\ r(t+\omega)=r(t),\ r(t)\in C[0,\omega]\}$。考虑带参数 $\theta(0\leqslant\theta\leqslant1)$ 的线性方程组的周期问题

$$(u_{Nt}+a_1u_{Nx^4}-a_2u_{Nxx},y_j)=\theta(F(v_N)_{xx}+G(v_N)+f,y_j), \tag{9.2.12}$$

$$(u_N(x,t+\omega),y_j)=(u_N(x,t),y_j),\ j=1,2,\cdots,N, \tag{9.2.13}$$

其中 $v_N(x,t)=\sum_{j=1}^{N}\beta_{Nj}(t)y_j(x)$.

(i)容易证明，对 $\forall\beta(t)=(\beta_{Nj}(t))_{j=1}^N\in B$，问题(9.2.12)，(9.2.13)存在唯一解 $\alpha(t)$，并且 $\alpha(t)\in C_\omega^1[0,\omega]$。事实上，只须考虑周期问题

$$\varphi'(t)+\mu\varphi(t)=h(t), \tag{9.2.14}$$

$$\varphi(t+\omega)=\varphi(t), \tag{9.2.15}$$

其中 $\varphi(t)$ 是未知函数，$h(t)$ 是已知的关于 t 以 ω 为周期的连续函数，$\mu > 0$ 是常数。利用常数变易法知道，问题(9.2.14)，(9.2.15)有唯一的解

$$\varphi(t) = \frac{e^{\mu t}}{e^{\mu\omega} - 1}\int_t^{t+\omega} h(\tau)e^{\mu\tau}\mathrm{d}\tau.$$

因而，问题(9.2.12)，(9.2.13)有唯一解 $\alpha(t)$：

$$\alpha_{Nj}(t) = \frac{e^{\mu_j t}}{e^{\mu_j\omega} - 1}\int_t^{t+\omega} h_j(\tau)e^{\mu_j\tau}\mathrm{d}\tau,\ j = 1, 2, \cdots, N,$$

其中 $\mu_j = a_1\lambda_j^2 + a_2\lambda_j$，$h_j(t) = \theta(F(v_N)_{xx} + G(v_N) + f, y_j)(j = 1, 2, \cdots, N)$. 这样，便定义了一个从 $\beta(t) \in B$ 到问题(9.2.12)，(9.2.13)的唯一解的映射 L_θ.

(ii)对任意给定的 $\theta \in [0, 1]$，映射 $L_\theta: B \to B$ 是连续的。事实上，对 $\forall \bar{\beta}, \tilde{\beta} \in B$。设 $\bar{\alpha} = L_\theta\bar{\beta}$，$\tilde{\alpha} = L_\theta\tilde{\beta}$，$\beta = \bar{\beta} - \tilde{\beta}$，$\alpha = \bar{\alpha} - \tilde{\alpha}$，$\bar{v}_N(x, t) = \sum_{j=1}^N \bar{\beta}_{Nj}(t)y_j(x)$，$\tilde{v}_N(x, t) = \sum_{j=1}^N \tilde{\beta}_{Nj}(t)y_j(x)$ 和 $v_N = \bar{v}_N - \tilde{v}_N$，则 $\alpha(t)$ 满足

$$\begin{aligned} &\alpha'_{Nj}(t) + (a_1\lambda_j^2 + a_2\lambda_j)\alpha_{Nj}(t) \\ &\quad = \theta(F(\bar{v}_N)_{xx} - F(\tilde{v}_N)_{xx}) + G(\bar{v}_N) - G(\tilde{v}_N), y_j), \end{aligned} \tag{9.2.16}$$

$$\alpha_{Nj}(t + \omega) = \alpha_{Nj}(t), j = 1, 2, \cdots, N, \tag{9.2.17}$$

这里 λ_j 是特征值问题(9.2.1)的特征值，“$'$”表示导数。

(9.2.16)两端同乘以 $\alpha_{Nj}(t)$，并对 $j = 1, 2, \cdots, N$ 求和，得

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}\frac{d}{\mathrm{d}t}\| u_N \|^2 + a_1\| u_{Nxx} \|^2 + a_2\| u_{Nx} \|^2 \\ &\quad = -\theta(F''(\tilde{v}_N + \delta_1 v_N)\tilde{v}_{Nx}v_N, u_{Nx}) - \theta(F'(\bar{v}_N)v_{Nx}, u_{Nx}) \\ &\qquad + \theta(G'(\tilde{v}_N + \delta_2 v_N)v_N, u_N) \leqslant C_1\| v_N \|_{H^1}\| u_{Nx} \| \\ &\quad \leqslant \frac{a_2}{2}\| u_{Nx} \|^2 + \frac{C_1^2}{2a_2}(\| v_N \|^2 + \| v_{Nx} \|^2), \end{aligned} \tag{9.2.18}$$

其中 $0 < \delta_1, \delta_2 < 1$，$C_1 > 0$ 是常数。

注意到

$$\|v_{Nx}\|^2=-\int_0^1 v_N v_{Nxx}\mathrm{d}x\leqslant\frac{1}{2}\|v_N\|^2+\frac{1}{2}\|v_{Nxx}\|^2$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N}\left|\beta_{Nj}\right|^2+\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N}\lambda_j^2\left|\beta_{Nj}\right|^2,\qquad(9.2.19)$$

由(9.2.18)式和(9.2.19)式得

$$\frac{1}{2}\frac{d}{\mathrm{d}t}\|u_N\|^2+\frac{a_2}{2}\|u_{Nx}\|^2\leqslant C_2\|\beta\|_B^2,\qquad(9.2.20)$$

其中 $C_2>0$ 是常数。

(9.2.20)式两端在 $[0,\omega]$ 上积分，并利用积分中值定理，存在 $t_2\in(0,\omega)$ 使得

$$\|u_{Nx}(\cdot,t_2)\|^2\leqslant\frac{2C_2}{a_2}\|\beta\|_B^2.\qquad(9.2.21)$$

利用 Poincare 不等式，由(9.2.21)式得

$$\|u_N(\cdot,t_2)\|^2\leqslant\frac{2C_2}{a_2}\|\beta\|_B^2\qquad(9.2.22)$$

再对(9.2.20)式两端在 $[t_2,t+\omega]$($\forall t\in[0,\omega]$) 上积分，并注意到(9.2.22)式，有

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant\omega}\|u_N\|^2\leqslant\frac{2C_2}{a_2}\|\beta\|_B^2+4\omega C_2\|\beta\|_B^2.$$

这表明

$$\|\bar{\alpha}-\tilde{\alpha}\|_B\leqslant C_3\|\bar{\beta}-\tilde{\beta}\|_B.\qquad(9.2.23)$$

由(9.2.23)式知：对固定的 θ，映射 $L_\theta:B\to B$ 是连续的。

(iii)设 $S\subset B$ 是任一有界子集. 对 $\forall\beta\in S$ 及 $0\leqslant\theta_1,\theta_2\leqslant1$，$\bar{\alpha}=L_{\theta_1}\beta$，$\tilde{\alpha}=L_{\theta_2}\beta$. 则 $\alpha=\bar{\alpha}-\tilde{\alpha}$ 是下面周期问题的解：

$$\begin{aligned}&\alpha'_{Nj}(t)+(a_1\lambda_j^2+a_2\lambda_j)\alpha_{Nj}(t)\\&\quad=(\theta_1-\theta_2)((F(v_N))_{xx}\\&\qquad+G(v_N)+f,y_j),\ \alpha_{Nj}(t+\omega)=\alpha_{Nj}(t),\ j=1,2,\cdots,N.\end{aligned}\qquad(9.2.24)$$

(9.2.24)两端同乘以 $\alpha_{Nj}(t)$，并对 $j=1,2,\cdots,N$ 求和，利用 Poincare 不等式和 Cauchy 不等式，得到

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_N\|^2+a_1\|u_{Nxx}\|^2+a_2\|u_{Nx}\|^2$$
$$=(\theta_1-\theta_2)(F(v_N)_{xx}+G(v_N)+f,\ u_N)$$
$$\leqslant\frac{a_2}{2}\|u_{Nx}\|^2+\frac{C_4}{2}\left|\theta_1-\theta_2\right|^2. \tag{9.2.25}$$

(9.2.25)式表明

$$\frac{d}{dt}\|u_N\|^2+a_2\|u_{Nx}\|^2\leqslant C_4\left|\theta_1-\theta_2\right|^2, \tag{9.2.26}$$

其中 $C_4>0$ 是常数。

同证明对固定的 θ，映射 $L_\theta:B\to B$ 的连续性相同，由(9.2.26)得

$$\sum_{j=1}^{N}\alpha_{Nj}^2(t)\leqslant C_5\left|\theta_1-\theta_2\right|^2, \tag{9.2.27}$$

其中 $C_5>0$ 是与 θ_1 和 θ_2 都无关的常数. 由(9.2.27)式知：对任意有界子集 $S\subset B$，映射 $L_\theta:B\to B$ 关于 θ 是连续的。

(iv)显然，$C_\omega^1[0,\ \omega]\searrow B$ 是紧的，其中"$\searrow$"表示嵌入关系，因而对每一个 $\theta\in[0,\ 1]$，映射 $L_\theta:B\to B$ 是全连续的。

(v)容易知道，当 $\theta=0$ 时，问题(9.2.12)，(9.2.13)有唯一解 $\alpha=0\equiv(0,\ 0,\ \cdots,\ 0)$。

(vi)由估计式(9.2.6)知道，映射 $L_\theta:B\to B$ 的所有可能的不动点 $\alpha(t)$ 都满足 $\|\alpha\|_B\leqslant C_6M_1$，其中 $C_6>0$ 是与 θ 无关的常数。

根据 Leray - Schauder 不动点定理，问题(9.2.4)、(9.2.5)至少存在一个解 $\alpha\in C_\omega[0,\ \omega]$。当 $\theta=1$ 时，(9.2.4)、(9.2.5)的解就是问题(9.2.2)、(9.2.3)的解。利用线性常微分方程组的理论知道，$\alpha\in C_\omega^1[0,\ \omega]$。引理证毕。

为了对近似解作进一步的估计，需要下面的引理。

引理 9.2.2 假定下面的条件满足

1. $H(z)$ 关于变量 z 是 k 次 $(k\geqslant1)$ 连续可微的，且存在常数

$p \geq 1$ 和 $Q > 0$ 使得 $\left| D_z^m H \right| \leq Q \left| z \right|^{p-m}$，其中 $0 \leq m \leq p$ 是整数。

2. $z(x, t) \in L^\infty)[0, \omega] \times [0, 1]) \cap L_\omega^\infty(R; H^k(0, 1))$；并且存在常数 $J > 0$ 使得

$$\operatorname{ess}\sup_{0 \leq t \leq \omega} \| z(\cdot, t) \|_\infty \leq J.$$

则成立估计式

$$\int_0^1 \left| D_x^k H(z(x, t) \right|^2 \mathrm{d}x \leq K J^\rho \| z \|_{H^k}^2,\ 0 \leq t \leq \omega,$$

其中 $K > 0$ 和 $\rho \geq 0$ 是常数，$D_z = \dfrac{d}{dz}$，$D_x = \dfrac{\partial}{\partial x}$。

证明　利用复合函数求导法则，得

$$\begin{aligned}(D_x^k H, D_x^k H) &\leq C \sum_{j=1}^k \int_0^1 (\left| D_z^j H \right| \left| D_x z \right|^{\alpha_{1j}} \left| D_x^2 z \right|^{\alpha_{2j}} \cdots \left| D_x^k z \right|^{\alpha_{kj}})^2 \mathrm{d}x \\ &\leq C \max_{1 \leq j \leq k} \operatorname{ess}\sup_{0 \leq t \leq \omega,\ 0 \leq x \leq 1} \left| D_z{}^j H \right|^2 \sum_{j=1}^k \int_0^1 \left| D_x z \right|^{2\alpha_{1j}} \\ &\quad \left| D_x{}^2 z \right|^{2\alpha_{2j}} \cdots \left| D_x{}^k z \right|^{2\alpha_{kj}} \mathrm{d}x,\end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}&\alpha_{1j} + \alpha_{2j} + \cdots + \alpha_{kj} = j, \\ &\alpha_{1j} + 2\alpha_{2j} + \cdots + k\alpha_{kj} = k,\end{aligned} \tag{9.2.28}$$

其中 $C > 0$ 是常数。

利用 Höder 不等式，可得到

$$(D_x^k H, D_x^k H) \leq C Q^2 \max_{1 \leq j \leq k} \operatorname{ess}\sup_{0 \leq t \leq \omega, 0 \leq x \leq 1} \left| z \right|^{2(p-j)} \sum_{j=1}^k \prod_{r=1}^k \| (D_x^r z)^{\alpha_{rj}} \|_{L^{p_{rj}}}^2, \tag{9.2.29}$$

其中 $p_{ij} = \dfrac{2k}{r\alpha_{rj}} \geq 2$，$\sum_{r=1}^k \dfrac{2}{p_{rj}} = 1$.

利用 Gaglizrdo－Nirenberg 不等式，有

$$\| D_x^r z \|_{L_r^{\frac{2k}{r}}} \leq K_0 \| z \|_{L^\infty}^{1-\frac{r}{k}} \| z \|_{H^k}^{\frac{r}{k}},$$

其中 $K_0 > 0$ 是插值常数. 因而

$$\| (D_x^r z)^{\alpha_{rj}} \|_{L^{p_{rj}}}^2 = \| D_x^r z \|_{L_r^{\frac{2k}{r}}}^{2\alpha_{rj}} \leqslant K_0^{2\alpha_{rj}} \| z \|_\infty^{2\alpha_{rj}(1-\frac{r}{k})} \| z \|_{H^k}^{\frac{2r\alpha_{rj}}{k}}. \tag{9.2.30}$$

把(9.2.30)式代入(9.2.29)，可得

$$(D_x^k H, D_x^k H) \leqslant K_1 Q^2 \max_{1\leqslant j\leqslant k} \operatorname{ess}\sup_{0\leqslant t\leqslant \omega} \| z \|_\infty^{2(p-j)} \sum_{j=1}^{k} \| z \|_\infty^{2(j-1)} \| z \|_{H^k}^2. \tag{9.2.31}$$

由于存在常数$j_0(1 \leqslant j_0 \leqslant k \leqslant p)$使得$\max\limits_{1\leqslant j\leqslant k} \operatorname{ess}\sup\limits_{0\leqslant t\leqslant\omega} \| z \|_\infty^{2(p-j)} = \operatorname{ess}\sup\limits_{0\leqslant t\leqslant\omega} \| z \|_\infty^{2(p-j_0)}$和存在常数$j_1(1 \leqslant j_1 \leqslant k)$使得$\max\limits_{1\leqslant j\leqslant k} \| z \|_\infty^{2(j-1)} = \| z \|_\infty^{2(j_1-1)}$，则由(9.2.31)式可得

$$\int_0^1 \left| D_x^k H(z(x,t)) \right|^2 \mathrm{d}x \leqslant KJ^\rho \| z \|_{H^k}^2,$$

其中$\rho = 2(p-j_0) + 2(j_1 - 1) \geqslant 0$是常数. 引理证毕。

引理9.2.3 假定引理9.2.1的条件和下述条件满足。

1. $MYMF(s) \in C^4(R)$，$F(0) = F''(0) = 0$，并且存在常数$A > 0$和$1 \leqslant \xi_1 < 4$使得对$\forall s \in R$，$\left| F(s) \right| \leqslant A \left| s \right|^{\xi_1 + 1}$成立；

2. $G(s) \in C^2(R)$，并且存在常数$B > 0$和$1 \leqslant \xi_2 < 8$使得对$\forall s \in R$，$\left| G(s) \right| \leqslant B \left| s \right|^{\xi_2+1}$成立；

3. $f \in C_\omega(R; H^2(0,1) \cap H_0^1(0,1))$，$f_t \in C_\omega(R; L^2(0,1))$。

记$M_2 = \sup\limits_{0\leqslant t\leqslant\omega} (\| f \|_{H^2} + \| f_t \|)$。则问题(9.1.1)－(9.1.3)的近似解$u_N(x,t)$满足估计式

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant\omega} (\| u_{Nt}(\cdot,t) \|_{H^2}^2 + \| u_N(\cdot,t) \|_{H^4}^2) \leqslant C_7(M_2). \tag{9.2.32}$$

这里及下面出现的$C_i(M_2)$是一关于M_2的齐次多项式。

证明 (9.2.2)式两端同乘以$-\lambda_j \alpha_{Nj}(t)$，并对$j = 1, 2, \cdots, N$求和，通过分部积分，并使用Höder不等式，有

$$\frac{1}{2}\frac{d}{\mathrm{d}t} \| u_{Nx} \|^2 + a_1 \| u_{Nx^3} \|^2 + a_2 \| u_{Nx^2} \|^2$$

$$
\begin{aligned}
&= (F'(u_N)u_{Nx}, u_{Nx^3}) - (G'(\delta u_N)u_N, u_{Nx^2}) - (f, u_{Nx^2}) \\
&\leqslant A\|u_N\|_\infty^{\xi_1}\|u_{Nx}\|\|u_{Nx^3}\| + B\|u_N\|_\infty^{\xi_2}\|u_N\|\|u_{Nx^2}\| \\
&\quad + \|f\|\|u_{Nx^2}\|,
\end{aligned}
\tag{9.2.33}
$$

其中 $0<\delta<1$.

利用 Gaglizrdo－Nirenberg 不等式，并注意到(9.2.6)式以及 $M_1<M_2$，得到

$$
\begin{aligned}
\|u_N\|_\infty &\leqslant C_8\|u_N\|^{\frac{5}{6}}\|u_{Nx^3}\|^{\frac{1}{6}} + C_8\|u_N\| \\
&\leqslant C_9 M_2^{\frac{5}{6}}\|u_{Nx^3}\|^{\frac{1}{6}} + C_9 M_2,
\end{aligned}
\tag{9.2.34}
$$

$$
\|u_{Nx}\| \leqslant C_{10}M_2^{\frac{2}{3}}\|u_{Nx^3}\|^{\frac{1}{3}} + C_{10}M_2, \tag{9.2.35}
$$

$$
\|u_{Nx^2}\| \leqslant C_{11}M_2^{\frac{1}{3}}\|u_{Nx^3}\|^{\frac{2}{3}} + C_{11}M_2. \tag{9.2.36}
$$

把(9.2.34)－(9.2.36)代入(9.2.33)，利用 Young 不等式，得到

$$
\frac{d}{dt}\|u_{Nx}\|^2 + a_1\|u_{Nx^3}\|^2 + a_2\|u_{Nx^2}\|^2 \leqslant C_{12}(M_2). \tag{9.2.37}
$$

(9.2.37)式两端在 $[0, \omega]$ 上积分，利用积分中值定理，存在 $t_3\in(0, \omega)$，使得

$$
\|u_{Nx^3}(\cdot, t_3)\|^2 \leqslant \frac{C_{12}(M_2)}{a_1}. \tag{9.2.38}
$$

由(9.2.35)和(9.2.38)，知

$$
\|u_{Nx}(\cdot, t_3)\|^2 \leqslant C_{13}(M_2). \tag{9.2.39}
$$

再对(9.2.37)式两端在 $[t_3, t+\omega]$($\forall t\in[0, \omega]$) 上积分，则有

$$
\sup_{0\leqslant t\leqslant\omega}\|u_{Nx}\|^2 \leqslant C_{14}(M_2). \tag{9.2.40}
$$

由于 $H^1[0, 1]\searrow C[0, 1]$，由(9.2.40)式得到

$$
\|u_N(\cdot, t)\|_{C[0,1]} \leqslant C_{15}\|u_N\|_{H^1} \leqslant C_{16}(M_2), \quad \forall t\in[0, \omega]. \tag{9.2.41}
$$

(9.2.2)式两端同乘以 $\lambda_j^4\alpha_{Nj}(t)$，并对 $j=1, 2, \cdots, N$ 求和，通过分部积分，利用 Hölder 不等式和引理 9.2.2，并注意到

(9.2.41)式，可以得到

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_{Nx^4}\|^2+a_1\|u_{Nx^6}\|^2+a_2\|u_{Nx^5}\|^2$$
$$=(F(u_N)_{x^4}+G(u_N)_{xx}+f_{xx},u_{Nx^6})$$
$$\leqslant C_{17}(C_{16}(M_2))^{p_1}\|u_N\|_{H^4}\|u_{Nx^6}\|+\|f_{xx}\|\cdot\|u_{Nx^6}\|. \tag{9.2.42}$$

由 Gagliardo – Nirenberg 不等式，得

$$\|u_{Nx^4}\|\leqslant C_{18}M_2^{\frac{1}{3}}\|u_{Nx^6}\|^{\frac{2}{3}}+C_{18}M_2. \tag{9.2.43}$$

由(9.2.42)和(9.2.43)式，利用 Young 不等式，可以得到

$$\frac{d}{dt}\|u_{Nx^4}\|^2+a_1\|u_{Nx^6}\|^2+2a_2\|u_{Nx^5}\|^2\leqslant C_{19}(M_2). \tag{9.2.44}$$

对(9.2.44)式在 $[0,\omega]$ 上积分，并且利用积分中值定理，存在 $t_4\in(0,\omega)$，使得

$$\|u_{Nx^6}(\cdot,t_4)\|^2\leqslant\frac{C_{19}(M_2)}{a_1}. \tag{9.2.45}$$

由(9.2.43)和(9.2.45)式知道，如下估计式成立：

$$\|u_{Nx^4}(\cdot,t_4)\|^2\leqslant C_{20}(M_2). \tag{9.2.46}$$

(9.2.44)式两端在 $[t_4,t+\omega]$ $(\forall t\in[0,\omega])$ 上积分，并注意到(9.2.46)，有

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant\omega}\|u_{Nx^4}\|^2\leqslant C_{21}(M_2). \tag{9.2.47}$$

由(9.2.6)和(9.2.47)式知：

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant\omega}\|u_N\|_{H^4}^2\leqslant C_{22}(M_2),\quad\sup_{0\leqslant t\leqslant\omega}\|u_N\|_{C^3[0,1]}\leqslant C_{23}(M_2). \tag{9.2.48}$$

(9.2.2)式两端同乘以 $\alpha'_{Nj}(t)$，并对 $j=1,2,\cdots,N$ 求和，利用 Cauchy 不等式和引理 9.2.2，同时注意到(9.2.41)式和(9.2.48)式，可得

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant\omega}\|u_{Nt}(\cdot,t)\|^2\leqslant C_{24}(M_2). \tag{9.2.49}$$

(9.2.2)式两端对 t 求导，得到

$$(u_{Ntt}+a_1u_{Nx^4t}-a_2u_{Nx^2t},\ y_j)=(F(u_N)_{xxt}+G(u_N)_t+f_t,\ y_j),$$
$$j=1,2,\cdots,N. \quad (9.2.50)$$

(9.2.50)式两端同乘以 $\lambda_j^2\alpha'_{Nj}(t)$，并对 $j=1,2,\cdots,N$ 求和，利用分部积分并使用 Hölder 不等式，注意到(9.2.48)式，可以得到

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_{Nx^2t}\|^2+a_1\|u_{Nx^4t}\|^2+a_2\|u_{Nx^3t}\|^2\\
&=(F(u_N)_{xxt}+G(u_N)_t+f_t,\ u_{Nx^4t})\\
&=\int_0^1\Big\{F(u_N)u_{Nx}^2u_{Nt}+2F''(u_N)u_{Nx}u_{Nxt}+F''(u_N)u_{Nt}u_{Nxx}\\
&\quad+F'(u_N)u_{Nxxt}+G'(u_N)u_{Nt}+f_t\Big\}u_{Nx^4t}\mathrm{d}x\\
&\leqslant C_{25}(M_2)\int_0^1(|u_{Nt}|+|u_{Nxt}|+|u_{Nxxt}|+|f_t|)|u_{Nx^4t}|\mathrm{d}x\\
&\leqslant C_{25}(M_2)(\|u_{Nt}\|+\|u_{Nxt}\|+\|u_{Nxxt}\|\\
&\quad+\|f_t\|)\|u_{Nx^4t}\|.
\end{aligned} \quad (9.2.51)$$

利用 Gagliardo－Nirenberg 不等式，有

$$\begin{cases}\|u_{Nxt}\|\leqslant C_{26}\|u_{Nt}\|^{\frac{3}{4}}\|u_{Nx^4t}\|^{\frac{1}{4}}+C_{26}\|u_{Nt}\|,\\ \|u_{Nxxt}\|\leqslant C_{27}\|u_{Nt}\|^{\frac{1}{2}}\|u_{Nx^4t}\|^{\frac{1}{2}}+C_{27}\|u_{Nt}\|.\end{cases} \quad (9.2.52)$$

把(9.2.52)代入(9.2.51)并利用 Young 等式，得到

$$\frac{d}{dt}\|u_{Nx^2t}\|^2+a_1\|u_{Nx^4t}\|^2+2a_2\|u_{Nx^3t}\|^2\leqslant C_{28}(M_2).$$
$$(9.2.53)$$

对(9.2.53)式在 $[0,\omega]$ 积分，存在 $t_5\in(0,\omega)$，使得

$$\|u_{Nx^3t}(\cdot,t_5)\|^2\leqslant C_{29}(M_2). \quad (9.2.54)$$

利用 Poincaré 不等式，由(9.2.54)可知

$$\|u_{Nxxt}(\cdot,t_5)\|^2\leqslant C_{29}(M_2). \quad (9.2.55)$$

再对(9.2.53)式在 $[t_5,t+\omega]$ $(\forall t\in[0,\omega])$ 上积分，并利用(9.2.55)式，可得到

$$\sup_{0\le t\le\omega}\|u_{Nxxt}(\cdot,t)\|^2\le C_{30}(M_2). \qquad (9.2.56)$$

由(9.2.48)式、(9.2.49)式和(9.2.56)式，可以知道估计式(9.2.32)成立。引理得证。

引理9.2.4 引理9.3的条件以及下面的条件成立：

1. $MYMF(s)\in C^6(R)$, $F^{(4)}(0)=0$; $G(s)=C^4(R)$, $G''(0)=0$;

2. $f\in C_\omega(R;H^4(0,1))$, $f_{xx}(0,t)=f_{xx}(1,t)=0$; $f_t\in C_\omega(R;H^3(0,1)\cap H_0^1(0,1))$, $f_{txx}(0,t)=f_{txx}(1,t)=0$, $M=\sup\limits_{0\le t\le\omega}(\|f\|_{H^4}+\|f_t\|_{H^3})$。问题(9.1.1)–(9.1.3)的近似解$u_N(x,t)$满足

$$\sup_{0\le t\le\omega}(\|u_{Ntt}(\cdot,t)\|_{H^1}^2+\|u_{Nt}(\cdot,t)\|_{H^5}^2 + \|u_N(\cdot,t)\|_{H^6}^2)\le C_{31}(M). \quad (9.2.57)$$

这里及以下出现的$C_i(M)$表示与N无关且关于M是齐次的多项式。

证明 (9.2.2)两端同乘以$\lambda_j^6\alpha_{Nj}(t)$，然后对$j=1,2,\cdots,N$求和，注意到$M_2<M$和$C_7(M_2)$是关于$M_2$的齐次多项式，利用引理9.2.2，可以得到

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_{Nx^6}\|^2+a_1\|u_{Nx^8}\|^2+a_2\|u_{Nx^7}\|^2\\&=(F(u_N)_{x^6}+G(u_N)_{x^4}+f_{x^4},u_{Nx^8})\\&\le[C_{32}(C_{16}(M_2))^{p_2}\|u_N\|_{H^6}+\|f_{x^4}\|]\|u_{Nx^8}\|. \end{aligned}\quad (9.2.58)$$

利用Gagliardo–Nirenberg不等式，得

$$\begin{aligned}\|u_{Nx^6}\|&\le C_{33}(\|u_N\|^{\frac14}\|u_{Nx^8}\|^{\frac34}+\|u_N\|)\\&\le C_{34}(M)(\|u_{Nx^8}\|^{\frac34}+1).\end{aligned}\quad (9.2.59)$$

利用Young不等式，由(9.2.58)和(9.2.59)式可得

$$\frac{d}{dt}\|u_{Nx^6}\|^2+a_1\|u_{Nx^8}\|^2+2a_2\|u_{Nx^7}\|^2\le C_{35}(M). \quad (9.2.60)$$

(9.2.60)式两端在$[0,\omega]$上积分，利用积分中值定理，存在

$t_6 \in (0,\omega)$，使得

$$\| u_{Nx^8}(\cdot,t_6) \|^2 \leqslant C_{36}(M). \tag{9.2.61}$$

由(9.2.59)和(9.2.61)式可得

$$\| u_{Nx^6}(\cdot,t_6) \|^2 \leqslant C_{37}(M). \tag{9.2.62}$$

再对(9.2.60)式两端在 $[t_6, t+\omega]$（$\forall t \in [0,\omega]$）上积分，并注意到(9.2.62)式，可得

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant\omega} \| u_{Nx^6}(\cdot,t) \|^2 \leqslant C_{38}(M). \tag{9.2.63}$$

注意到(9.2.32)以及 $H^1[0,1] \searrow C[0,1]$，有

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant\omega} \| u_{Nt} \|_{C[0,1]} \leqslant C_{39}(M). \tag{9.2.64}$$

(9.2.50)两端乘以 $-\lambda_j^5\alpha'_{Nj}(t)$，然后对 $j=1, 2, \cdots, N$ 求和，利用 Gagliardo – Nirenberg 不等式，并注意到(9.2.48)，(9.2.64)，可得

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\| u_{Nx^5t} \|^2 + a_1 \| u_{Nx^7t} \|^2 + a_2 \| u_{Nx^6t} \|^2 \\
&\quad = (F(u_N)_{tx^5} + G(u_N)_{tx^3} + f_{tx^3},\ u_{Nx^7t}) \\
&\quad \leqslant C_{40}(M)(\| u_N \|_{H^5} + \| u_{Nt} \|_{H^5} + 1)\| u_{Nx^7t} \|.
\end{aligned} \tag{9.2.65}$$

利用 Galliardo – Nirenberg 不等式，并使用(9.2.32)式，知道

$$\begin{aligned}
\| u_{Nx^5t} \| &\leqslant C_{41}(\| u_{Nt} \|^{\frac{2}{7}} \| u_{Nx^7t} \|^{\frac{5}{7}} + \| u_{Nt} \|) \\
&\leqslant C_{42}(M)(\| u_{Nx^7t} \|^{\frac{5}{7}} + 1).
\end{aligned} \tag{9.2.66}$$

把(9.2.66)式代入(9.2.65)，并注意到(9.2.63)式，使用 Young 不等式，得到

$$\frac{d}{dt}\| u_{Nx^5t} \|^2 + a_1 \| u_{Nx^7t} \|^2 \leqslant C_{43}(M). \tag{9.2.67}$$

对(9.2.67)式两端在 $[0, \omega]$ 上积分，存在 $t_7 \in (0, \omega)$ 使得

$$\| u_{Nx^7t}(\cdot, t_7) \|^2 \leqslant C_{44}(M). \tag{9.2.68}$$

利用(9.2.66)式和(9.2.68)式可得

$$\| u_{Nx^5t}(\cdot, t_7) \|^2 \leqslant C_{45}(M). \tag{9.2.69}$$

再对(9.2.67)式两端在 $[t_7, t+\omega]$($\forall t \in [0, \omega]$)，并注意到(9.2.69)式，有

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant \omega} \| u_{Nx^5t}(\cdot, t) \|^2 \leqslant C_{46}(M). \tag{9.2.70}$$

(9.2.50)两端同乘以 $-\lambda_j \alpha''_{Nj}(t)$，并对 $j=1, 2, \cdots, N$ 求和，利用 Cauchy 不等式，(9.2.32)及(9.2.70)式，有估计式

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant \omega} \| u_{Nxtt}(\cdot, t) \|^2 \leqslant C_{47}(M). \tag{9.2.71}$$

利用 Sobolev - Poincare 不等式，由(9.2.71)式知

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant \omega} \| u_{Ntt} \|_{H^1}^2 \leqslant C_{48}(M). \tag{9.2.72}$$

由(9.2.32)、(9.2.63)、(9.2.70)和(9.2.72)式知道(9.2.57)式成立。引理得证。

第三节　问题(9.1.1) - (9.1.3)解的存在性与唯一性

定理 9.3.1　假设引理 9.2.3 的条件成立，则问题(9.1.1) - (9.1.3)存在广义的时间周期解 $u(x, t)$ 且满足

$$u(x, t) \in L_\omega^2(R; H^4[0, 1]),\ u_t(x, t) \in L_\omega^2(R; H^2(0, 1)) \tag{9.3.1}$$

和

$$\int_0^\omega \int_0^1 \left\{ u_t + a_1 u_{x^4} - a_2 u_{xx} - F(u)_{xx} - G(u) - f \right\} \Phi \mathrm{d}x\mathrm{d}t = 0,$$

$$\forall \Phi \in L_\omega^2(R; L^2(0, 1)). \tag{9.3.2}$$

特别地，当 M_2 充分小时，上述广义解是唯一的。

证明　在定理的条件下，(9.2.32)式成立。利用 Sobolev 嵌入定理和(9.2.32)式知道，下面的估计式成立

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant \omega} (\| u_{Nt}(\cdot, t) \|_{C^1[0, 1]} + \| u_N(\cdot, t) \|_{C^3[0, 1]}) \leqslant C_{49}(M_2). \tag{9.3.3}$$

由(9.3.3)式和 Ascoli - Arzela 定理知，存在着函数 $u(x, t)$ 和 $\{u_N(x, t)\}$ 的子序列(还记作) $\{u_N(x, t)\}$ 满足：当 $N \to \infty$ 时，

$\{u_{Nx^i}(x,t)\}(i=0,1)$ 在 $[0,\omega]\times[0,1]$ 上一致地收敛到 $u_{x^i}(x,t)(i=0,1)$。由(9.2.32)式知，当 $N\to\infty$ 时，子序列 $\{u_{Nx^i}(x,t)\}(i=1,2,3,4)$ 和 $\{u_{Nx^it}(x,t)\}(i=0,1,2)$ 在 $L^2_\omega(R;L^2(0,1))$ 中分别弱收敛于 $u_{x^i}(x,t)(i=1,2,3,4)$ 和 $u_{x^it}(x,t)(i=0,1,2)$。由(9.2.32)式知，

$$\begin{cases}\|u_N\|_{L^2_\omega(R;H^4(0,1))}\leqslant C_7(M_2),\\ \|u_{Nt}\|_{L^2_\omega(R;H^2(0,1))}\leqslant C_7(M_2).\end{cases}\tag{9.3.4}$$

并且

$$H^4(0,1)\searrow H^3(0,1)\searrow H^2(0,1),$$

显然，此嵌入是紧嵌入，记

$$W=\{u\mid u\in L^2_\omega(R;H^4(0,1)),\ u_t\in L^2_\omega(R;H^2(0,1))\}.$$

由 Aubin 引理知，$W\searrow L^2_\omega(R;H^3(0,1))$ 是紧的。利用定理的假定条件和(9.3.4)知道，存在 $\{u_N(x,t)\}$ 的子序列(还记作) $\{u_N(x,t)\}$，满足当 $N\to\infty$ 时，$\{u_N(x,t)\}$ 在 $L^2_\omega(R;H^3(0,1))$ 中收敛。

根据上述的子序列的收敛性，$\{F(u_N)_{xx}\}$ 在 $L^2_\omega(R;L^2(0,1))$ 中弱收敛到 $F(u)_{xx}$。事实上，对任意的 $w\in L^2_\omega(R;L^2(0,1))$，有

$$\begin{aligned}&\left|\int_0^\omega(F(u_N)_{xx}-F(u)_{xx},w)\mathrm{d}t\right|\\
&\leqslant\int_0^\omega\int_0^1\Big\{\left|F''(u_N)-F''(u)\right|u_{Nx}^2+\left|F''(u)\|u_{Nx}-u_x\|u_{Nx}+u_x\right|\\
&\quad+\left|F'(u_N)-F(u)\right|\left|u_{Nx}\right|+\left|F'(u)\right|\left|u_{Nxx}-u_{xx}\right|\Big\}\left|w\right|\mathrm{d}x\mathrm{d}t\\
&\leqslant\int_0^\omega\int_0^1\Big\{\left|F''(u_N+\theta_1(u-u_N))\right|\left|u-u_N\right|u_{Nx}^2\\
&\quad+\left|F''(u)\right|\left|u_{Nx}-u_x\right|(\left|u_{Nx}\right|+\left|u_x\right|)\\
&\quad+\left|F''(u_N+\theta_2(u-u_N))\right|\left|u-u_N\right|\left|u_{Nx}\right|\\
&\quad+\left|F'(u)\right|\left|u_{Nxx}-u_{xx}\right|\Big\}\left|w\right|\mathrm{d}x\mathrm{d}t,\end{aligned}\tag{9.3.5}$$

其中 $0 < \theta_1, \theta_2 < 1$。

注意到(9.3.3)式以及 $u, u_x \in C([0, \omega] \times [0, 1])$，由(9.3.5)可知

$$\begin{aligned}&\left|\int_0^\omega \int_0^1 (F(u_N)_{xx} - F(u)_{xx}) w \mathrm{d}x\mathrm{d}t\right| \\ &\leqslant C_{50}(M_2) \int_0^\omega \int_0^1 \left\{\left|u_N - u\right| + \left|u_{Nx} - u_x\right| + \left|u_{Nxx} - u_{xx}\right|\right\}\left|w\right| \mathrm{d}x\mathrm{d}t \\ &\leqslant C_{50}(M_2)(\|u_N - u\|_{L^2((0,\omega)\times(0,1))} + \|u_{Nx} - u_x\|_{L^2((0,\omega)\times(0,1))} \\ &\quad + \|u_{Nxx} - u_{xx}\|_{L^2((0,\omega)\times(0,1))})\|w\|_{L^2((0,\omega)\times(0,1))}.\end{aligned} \tag{9.3.6}$$

由(9.3.6)式知，存在子序列 $\{u_N(x, t)\}$ 满足当 $N \to \infty$ 时，$\{F(u_N)_{xx}\}$ 在 $L^2_\omega(R;L^2(0, 1))$ 中弱收敛于 $F(u)_{xx}$。因而，问题(9.1.1)-(9.1.3)存在广义的周期解 $u(x, t)$ 并且 $u(x, t)$ 满足(9.3.1)和(9.3.2)。

由(9.2.32)式知道

$$\|u\|_{C([0,\omega]\times[0,1])} \leqslant C_{51}(M_2), \quad \|u_x\|_{C([0,\omega]\times[0,1])} \leqslant C_{51}(M_2). \tag{9.3.7}$$

下面证明解的唯一性。假设 $u(x, t)$ 和 $v(x, t)$ 是问题(9.1.1)-(9.1.3)的两个广解。

置

$$w(x,t) = u(x,t) - v(x,t),$$

则 $w(x,t)$ 满足时间周期问题

$$w_t + c_1 w_{x^4} - a_2 w_{xx} = F(u)_{xx} - F(v)_{xx} + G(u) - G(v),$$

$$0 < x < 1, t \in R, \tag{9.3.8}$$

$$w(0,t) = w(1,t) = 0, w_{xx}(0,t) = w_{xx}(1,t) = 0, t \in R, \tag{9.3.9}$$

$$w(x,t) = w(x,t+\omega), 0 \leqslant x \leqslant 1, t \in R. \tag{9.3.10}$$

(9.3.8)式两端同乘以 $2w$ 并在区间(0,1)上关于变量 x 积分,通过利用积分中值定理,得到

$$\frac{d}{dt}\|w\|^2+2a_1\|w_{xx}\|^2+2a_2\|w_x\|^2$$
$$=2\int_0^1\left\{-F''(v+\theta_1(u-v))ww_x+G(v+\theta_2(u-v))w^2\right\}dx$$
$$\leqslant 2\int_0^1\left\{\left|F''(v+\theta_1(u-v))\right|\left|w\right|\left|w_x\right|+\left|G(v+\theta_2(u-v))\right|w^2\right\}dx, \tag{9.3.11}$$

其中 $0<\theta_1, \theta_2<1$。

注意到(9.3.7)式和关于 $F(s)$ 与 $G(s)$ 的假定，利用 Cauchy 不等式，由(9.3.11)式可得

$$\frac{d}{dt}\|w\|^2+2a_2\|w_x\|^2\leqslant C_{52}(M_2)\|w_x\|^2, \tag{9.3.12}$$

其中 $C_{52}(M_2)$ 是关于 M_2 的齐次多项式。取 M_2 充分小时，使得 $L=2a_2-C_{52}(M_2)>0$，利用 Poincare 等式，由(9.3.12)式可得

$$\frac{d}{dt}\|w\|^2\leqslant -L\|w\|^2, \tag{9.3.13}$$

(9.3.13)表明对 $\forall t>0$，有

$$\|w(\cdot,t)\|^2\leqslant\|w(\cdot,0)\|^2e^{-Lt}.$$

对 $\forall t\in R$，都存在自然数 N_0 使得 $t+N_0\omega>0$，注意到 $u(x,t)$ 关于 t 的周期性，可得

$$\|w(\cdot,t)\|^2=\|w(\cdot,t+N_0\omega)\|^2$$
$$\leqslant\|w(\cdot,0)\|^2e^{-LN\omega},\ \forall N>N_0,$$

这表明

$$\|w(\cdot,t)\|=0,\ t\in R.$$

定理得证。

定理 9.3.2 在引理 9.2.4 的假定条件下，问题(9.3.1)－(9.1.3)存在古典解 $u(x,t)$。并且，如果 M 充分小，则古典解是唯一的。

证明 由引理 9.2.4 知道，(9.2.57)式成立。利用 Sobolev 嵌入定理，有

$$\sup_{0\leq t\leq\omega}(\|u_{Nt}(\cdot,t)\|^2_{C[0,1]}+\|u_{Nt}(\cdot,t)\|^2_{C^4[0,1]}$$
$$+\|u_N(\cdot,t)\|^2_{C^5[0,1]})\leq C_{53}(M).\quad(9.3.14)$$

利用 Ascoli - Arzela 定理。由(9.3.14)知道，存在 $\{u_N(x,t)\}$ 的一个子序列(还记为 $\{u_N(x,t)\}$)以及函数 $u(x,t)$ 满足当 $N\to\infty$ 时，序列 $\{u_{Nx^i}(x,t)\}(i=0,1,2,3,4)$ 及 $\{u_{Nt}(x,t)\}$ 分别在 $[0,\omega]\times[0,1]$ 上一致地收敛到 $u_{x^i}(x,t)(i=0,1,2,3,4)$ 和 $u_t(x,t)$。因此问题(9.3.1) - (9.1.3)存在古典解 $u(x,t)$。

定理9.3.1 中广义解的唯一性知，问题(9.3.1) - (9.1.3)的古典解是唯一的。定理证毕。

参考文献

[1] D. S. Cohen and J. D. Murray. A generalized diffusion model for growth and dispersal in a population[J]. J. Math. Biol., 1981, 12: 237 -249.

[2] 宋健，于景元. 人口控制论[M]. 北京:科学出版社，1985.

[3] Liu Baoping and C. V. Pao. Integral representation of generalized diffusion model in population problems[J]. Journal of Integral Equation, 1984, 6: 175 -185.

[4] Chen Guowang. Classical global solution of the initial boundary value problems for a class of nonlinear parabolic equations[J]. Comment. Math. Univ. Carolinae, 1994, 35(3): 431 -441.

[5] 陈国旺，孙和生. 广义 Ginzburg - Landau 型非线性高阶抛物型方程的 Cauchy 问题[J]. 数学年刊，1994，15A(4): 482 -492.

[6] 陈国旺. 人口问题中的三维 Ginzburg - Landau 模型方程的 Cauchy 问题[J]. 数学年刊，1999:20A(2): 143 -150.

[7] 陈国旺，吕胜关. 人口问题中广义三维 Ginzburg - Landau 模型方程[J]. 应用数学学报，2000，23(3): 41 -51.

第十章　人口问题中的一类二维 Ginzburg - Landau 模型方程时间周期解

第一节　引言

本章研究如下广义 Ginzburg - Landau 模型方程

$$u_t = -a_1\nabla^4 u + a_2\nabla^2 u + a\nabla^2 u^3 + G(u), \quad (10.1.1)$$

的周期问题，方程(10.1.1)是 Cohen 和 Murray 于 1981 年研究人口问题中的增长和弥散时提出的[1]，其中 $a_1 > 0$，$a_2 > 0$ 以及 $\omega > 0$ 都是物理常数，$u(x, t)$ 是未知函数，它是变量 $x = (x_1, x_2, \cdots x_n) \in R^n$ 和 $t \in R$ 的函数，$u(x, t)$ 表示人口密度，$\nabla = (\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \cdots, \frac{\partial}{\partial x_n})$ 表示梯度算子，$G(s)$ 是已知的非线性函数，其中 $G(s)$ 表示动力项或者反应项。

如果考虑到“一个国家内部，由于不同地区或省市的人口分布的不平衡性，人口迁移政策依然可能是调整人口状态的可行措施，因而预报不同地区的人口发散趋势时，人口迁移函数依然是必须考虑的重要因素，必须预计到人口迁移函数对人口发展方程解的影响”[2]。如果考虑人口扰动函数 $f(x, t)$ 对人口的影响，人口增长与弥散的模型方程(10.1.1)具有形式

$$u_t = -a_1\nabla^4 u + a_2\nabla^2 u + a\nabla^2 u^3 + G(u) + f(x, t), \quad (10.1.2)$$

对于模型方程(10.1.1)的研究，已经有了不少结果，文献[3 - 5]研究了一维方程(10.1.1)一维情形的 Cauchy 问题和初边值问题，得到了问题的整体广义解和整体古典解的存在性、唯一

性；文献[6，7]分别证明了方程(10.1.1)的三维情形的 Cauchy 问题及初边值问题，整体解的存在性、唯一性及渐近性，同时文献[7]又给出了解爆破的充分条件。

本章讨论方程(10.1.1)具有边界条件

$$u(x,t)=\nabla^2 u(x,t)=0,\ x\in\partial\Omega,\ t\in R \quad (10.1.3)$$

和时间周期条件

$$u(x,t+\omega)=u(x,t),\ x\in\Omega,\ t\in R \quad (10.1.4)$$

的周期问题，其中 $\Omega\subset R^2$ 是具有光滑边界 $\partial\Omega$ 的有界区域，不失一般性，后面的讨论中，我们总是假定 $\left|\Omega\right|\leqslant 1;\omega>0$ 是常数，函数 $f(x,t)$ 关于 t 以 ω 为周期。

本章中使用如下的记号：设 X 是 Banach 空间，$C_\omega^k(R;X)$ 表示定义在 R 上具有直到 k 阶连续导数的以 ω 为周期且取值于 X 的函数构成的集合，其范数为

$$\|u\|_{C_\omega^k(R;X)}=\sup_{0\leqslant t\leqslant\omega}\left\{\sum_{i=1}^{k}\|D_t^i u\|_X\right\},$$

其中 $D_t=\frac{\partial}{\partial t}$，$\|\cdot\|_X$ 表示 X 中的范数。

用 $L_\omega^p(R;X)(1\leqslant p\leqslant\infty)$ 表示定义在 R 上以 ω 为周期取值的并且满足

$$\|u\|_{L_\omega^p(R;X)}=\left(\int_0^\omega\|u\|_X^p\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p}}<\infty\quad(1\leqslant p<\infty),$$

$$\|u\|_{L_\omega^\infty}(R,X)=ess\sup_{0\leqslant t\leqslant\omega}\|u\|_X<\infty\quad(p=\infty)$$

的可测函数集。

$W_\omega^{k,p}(R;X)$ 表示关于 t 的直到 k 阶的偏导数都属于 $L_\omega^p(R;X)$ 的函数集合. $H^m(\Omega)$ 和 $H_0^1(\Omega)$ 是通常的 Sobolev 空间；$(\cdot,\cdot)$ 表示 $L^2(\Omega)$ 中的内积. 为简单起见，用 $\|\cdot\|_p$ 及 $\|\cdot\|_{H^m}$ 分别表示 $L^p(\Omega)$ 和 $H^m(\Omega)$ 中的范数，特别地，$\|\cdot\|$ 表示 $\|\cdot\|_2$。

第二节 积分估计和问题(10.1.2) – (10.1.4)的近似解的存在性

设 $\{y_j(x)\}(j=1, 2, \cdots)$ 是特征值问题

$$\nabla^2 y+\lambda y=0,\ y\Big|_{\partial\Omega}=0,$$

相应于特征值 $\lambda_j(j=1, 2, \cdots)$ 的特征函数构成的 $L^2(\Omega)$ 中的一标准正交基。

设 $u_N(x, t)=\sum\limits_{j=1}^{N}\alpha_{Nj}(t)y_j(x)$ 是问题(10.1.2) – (10.1.4)的 Galerkin 近似解，其中 $\alpha_{Nj}(t)(j=1, 2, \cdots, N)$ 是待定系数，N 是正整数. 根据 Galerkin 方法，$\alpha_{Nj}(t)(j=1, 2, \cdots, N)$ 应该满足如下常微分方程组的时间周期问题

$$(u_{Nt}+a_1\nabla^4 u_N-a_2\nabla^2 u_N-a\nabla^2 u_N^3-G(u_N),\ y_j)=(f,\ y_j),\tag{10.2.1}$$

$$(u_N(x,\ t+\omega),\ y_j)=(u_N(x,\ t),\ y_j),\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ N.\tag{10.2.2}$$

为了使用 Leray – Schauder 不动点定理证明问题(10.2.1), (10.2.2)解 $\alpha_{Nj}(t)(j=1, 2, \cdots, N)$ 的存在性，考虑如下带参数 θ 的常微分方程组的时间周期问题

$$(u_{Nt}+a_1\nabla^4 u_N-a_2\nabla^2 u_N,\ y_j)=\theta(a\nabla^2 u_N^3+G(u_N)f,\ y_j),\tag{10.2.3}$$

$$(u_N(x,\ t+\omega),\ y_j)=(u_N(x,\ t),\ y_j),\quad j=1,\ 2,\ \cdots,\ N,\ 0\leqslant\theta\leqslant 1.\tag{10.2.4}$$

为此，首先给出如下引理：

引理 10.2.1(Sobolev – Poincaré 不等式) 假设 $\Omega\subset R^n$ 是具有光滑边界 $\partial\Omega$ 的有界区域，则存在着常数 C_* 使得 $\|u\|\leqslant C_*\|\nabla u\|$ 对所有 $u\in H_0^1(\Omega)$ 都成立。

引理 10.2.2 假定下面的条件满足

(1) $G(s) \in C^1(R)$, $G(0) = 0$, 并且存在常数 γ 使得对 $\forall s \in R$, 有 $G'(s) \leqslant \gamma$, 并且 $\gamma C_*^2 < a_2$.

(2) $f \in C_\omega(R;L^2(\Omega))$, 记 $M_1 = \sup\limits_{0\leqslant t\leqslant\omega} \|f\|$。则问题(10.2.3), (10.2.4)存在解 $\alpha(t) = (\alpha_{N1}(t), \alpha_{N2}(t), \cdots, \alpha_{NN}(t)) \in C_\omega^1[0, \omega]$, 其中 $C_\omega^1[0, \omega] = \{r(t) \mid r(t+\omega) = r(t), \forall t \in R$ 且 $r(t) \in C^1[0, \omega]\}$, 并且问题(10.1.2)-(10.1.4)的近似解 $u_N(x, t)$ 满足估计式

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant\omega} \|u_N\|^2 \leqslant C_0 M_1^2, \tag{10.2.5}$$

这里 $C_0 > 0$ 是与 N 和 M_1 都无关的常数。

证明 只需证明 $0 < \gamma < \dfrac{a_2}{C_*^2}$ 的情形就可以了, 因为容易知道结论对 $\gamma \leqslant 0$ 是成立的。

(10.2.3)式两端同乘以 $\alpha_{Nj}(t)$, 并对 $j = 1, 2, \cdots, N$ 求和, 利用 Hölder 不等式及和引理 10.2.1, 有

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_N\|^2 + a_1\|\nabla^2 u_N\|^2 + a_2\|\nabla u_N\|^2 \\
&\quad = -\theta_1\int_\Omega 3au_N^2(\nabla u_N)^2 dx + \theta\int_0^1 G'(\delta u_N)u_N^2 dx + \theta\int_0^1 f u_N dx \\
&\quad \leqslant \gamma C_*^2 \|\nabla u_N\|^2 + C_* M_1 \|f\|\,\|\nabla u_N\|,
\end{aligned} \tag{10.2.6}$$

其中 $0 < \delta < 1$. 注意到 $\gamma C_*^2 < a_2$, 利用 Young 不等式, 由(10.2.6)可得到

$$\frac{d}{dt}\|u_N\|^2 + (a_2 - \gamma C_*^2)\|\nabla u_N\|^2 \leqslant \frac{C_*^2 M_1^2}{a_2 - \gamma C_*^2}, \tag{10.2.7}$$

对(10.2.7)式两端在 $[0, \omega]$ 上积分, 得

$$\int_0^\omega \|\nabla u_N\|^2 dt \leqslant \frac{C_*^2 M_1^2 \omega}{(a_2 - \gamma C_*^2)^2} \tag{10.2.8}$$

利用积分中值定理，由(10.2.8)式知：$\exists t_1 \in (0, \omega)$，使得

$$\| \nabla u_N(\cdot, t_1) \|^2 \leq \frac{C_*^2 M_1^2}{(a_2 - \gamma C_*^2)^2}, \qquad (10.2.9)$$

利用引理 10.2.1，由(10.2.9)式可以得到

$$\| u_N(\cdot, t_1) \|^2 \leq \frac{C_*^4 M_1^2}{(a_2 - \gamma C_*^2)^2}. \qquad (10.2.10)$$

(10.2.7)两端再在 $[t_1, t+\omega]$($\forall t \in [0, \omega]$)积分，使用(10.2.10)式和 Poincaré 不等式，得

$$\sup_{0 \leq t \leq \omega} \| u_N(\cdot, t) \|^2 \leq \| u_N(\cdot, t_1) \|^2 + \frac{2\omega C_*^2 M_1^2}{a_2 - \gamma C_*^2} \leq C_0 M_1^2,$$

这里 $C_0 = \dfrac{2\omega C_*^2}{(a_2 - \gamma C_*^2)^2}\left(\dfrac{C_*^2}{2\omega} + a_2 - \gamma C_*^2\right)$ 是一个与 θ, N 和 M_1 都无关的常数。引理得证。

利用和文献[8]中相同的标准的方法，利用 Leray – Schauder 不动点定理可以证明问题(10.2.3)，(10.2.4)至少存在一个解

$$\alpha(t) = (\alpha_{N1}(t), \alpha_{N2}(t), \cdots, \alpha_{NN}(t)) \in C_\omega[0, \omega],$$

根据线性常微分方程的理论，知道

$$\alpha(t) = (\alpha_{N1}(t), \alpha_{N2}(t), \cdots, \alpha_{NN}(t)) \in C_\omega^{\ 1}[0, \omega].$$

引理 10.2.3　假定引理 10.2.2 的条件和下述条件满足。

1. $G(s) \in C^2(R)$，并且存在常数 $A > 0$ 和 $1 \leq \xi \leq 4$ 使得对 $\forall s \in R$，$\left| G(s) \right| \leq A \left| s \right|^{\xi_2+1}$ 成立；

2. $f \in C_\omega(R; H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega))$，$f_t \in C_\omega(R; H_0^1(\Omega))$。记 $M_2 = \sup\limits_{0 \leq t \leq \omega}(\|f\|_{H^2} + \|f_t\|_{H^1})$。如果 M_2 充分小则问题(10.1.2) – (10.1.4)的近似解 $u_N(x, t)$ 满足估计式

$$\sup_{0 \leq t \leq \omega}(\| u_{Nt}(\cdot, t) \|_{H^3}^2 + \| u_N(\cdot, t) \|_{H^4}^2) \leq C_1(M_2). \qquad (10.2.11)$$

这里及下面出现的 $C_i(M_2)$ 是一与 N 无关的关于 M_2 的齐次多项式，并且 $\lim\limits_{M_2 \to \infty} C_i(M_2) = C_i(0) = 0$。

证明 (10.2.1)式两端同乘以 $\lambda_j^4\alpha_{Nj}(t)$，并对 $j=1,2,\cdots,N$ 求和，通过分部积分，并使用 Höder 不等式，有

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla^4 u_N\|^2+a_1\|\nabla^6 u_N\|^2+a_2\|\nabla^5 u_N\|^2\\
&=(a\nabla^4 u_N^3+\nabla^2 G(u_N)+\nabla^2 f,\ \nabla^6 u_N)\\
&=3a(12(\nabla u_N)^2\nabla^2 u_N+6u_N(\nabla^2 u_N)^2\\
&\quad+8u_N\nabla u_N\nabla^3 u_N+u_N^2\nabla^4 u_N\\
&\quad+G''(u_N)(\nabla u_N)^2+G'(u_N)\nabla^2 u_N+\nabla^2 f,\ \nabla^6 u_N)\\
&\leqslant 3a(12\|\nabla u_N\|_\infty^2\|\nabla^2 u_N\|+6\|u_N\|_\infty\|\nabla^2 u_N\|_4^2\\
&\quad+8\|u_N\|_\infty\|\nabla u_N\|_\infty\|\nabla^3 u_N\|+\|u_N\|_\infty^2\|\nabla^4 u_N\|\\
&\quad+A\|u_N\|_\infty^{\xi-1}\|\nabla u_N\|_4^2+A\|u_N\|_\infty^{\xi}\|\nabla^2 u_N\|\\
&\quad+\|\nabla^2 f\|)\|\nabla^6 u_N\| \qquad (10.2.12)
\end{aligned}
$$

利用 Gaglizrdo－Nirenberg 不等式，并注意到(10.2.5)，可以得到

$$\|\nabla u_N\|_\infty\leqslant C_3(M_1^{\frac{2}{3}}\|\nabla^6 u_N\|^{\frac{1}{3}}+M_1) \qquad (10.2.13)$$

$$\|\nabla^2 u_N\|\leqslant C_4(M_1^{\frac{2}{3}}\|\nabla^6 u_N\|^{\frac{1}{3}}+M_1) \qquad (10.2.14)$$

$$\|u_N\|_\infty\leqslant C_5(M_1^{\frac{5}{6}}\|\nabla^6 u_N\|^{\frac{1}{6}}+M_1) \qquad (10.2.15)$$

$$\|\nabla^2 u_N\|_4\leqslant C_6(M_1^{\frac{7}{12}}\|\nabla^6 u_N\|^{\frac{5}{12}}+M_1) \qquad (10.2.16)$$

$$\|\nabla^3 u_N\|\leqslant C_7(M_1^{\frac{1}{2}}\|\nabla^6 u_N\|^{\frac{1}{2}}+M_1) \qquad (10.2.17)$$

$$\|\nabla^4 u_N\|\leqslant C_8(M_1^{\frac{1}{3}}\|\nabla^6 u_N\|^{\frac{2}{3}}+M_1) \qquad (10.2.18)$$

$$\|\nabla u_N\|_4\leqslant C_9(M_1^{\frac{3}{4}}\|\nabla^6 u_N\|^{\frac{1}{4}}+M_1) \qquad (10.2.19)$$

把(10.2.13)－(10.2.19)代入(10.2.12)，利用 Young 不等式，得到

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla^4 u_N\|^2+a_1\|\nabla^6 u_N\|^2+a_2\|\nabla^5 u_N\|^2\\
&\leqslant C_{10}(M_1^2\|\nabla^6 u_N\|^2+M_1^{\frac{5}{2}}\|\nabla^6 u_N\|^{\frac{3}{2}}+M_1^{\frac{7}{3}}\|\nabla^6 u_N\|^{\frac{5}{3}}\\
&\quad+M_1^{\frac{17}{6}}\|\nabla^6 u_N\|^{\frac{7}{6}}+M_1^{\frac{13}{6}}\|\nabla^6 u_N\|^{\frac{11}{6}}+M_1^{\frac{8}{3}}\|\nabla^6 u_N\|^{\frac{4}{3}}\\
&\quad+M_1^3\|\nabla^6 u_N\|+M_1^{\frac{5}{3}}\|\nabla^6 u_N\|^{\frac{5}{3}}+M_1^{\frac{7}{6}}\|\nabla^6 u_N\|^{\frac{11}{6}})
\end{aligned}
$$

$$+ C_{10}(M_1^{\frac{5\xi}{6}+\frac{2}{3}} \|\nabla^6 u_N\|^{\frac{\xi}{6}+\frac{4}{3}} + M_1^{\frac{5\xi}{6}+1} \|\nabla^6 u_N\|^{\frac{\xi}{6}+1}$$
$$+ M_1^{\xi+\frac{2}{3}} \|\nabla^6 u_N\|^{\frac{4}{3}} + M_1^{\frac{5\xi}{6}+\frac{7}{6}} \|\nabla^6 u_N\|^{\frac{\xi}{6}+\frac{5}{6}}$$
$$+ M_1^{\xi+\frac{1}{2}} \|\nabla^6 u_N\|^{\frac{3}{2}} + M_1^{\xi+1} \|\nabla^6 u_N\| + M_1 \|\nabla^6 u_N\|), \tag{10.2.20}$$

关于 ξ, 分别考虑如下两种情况：

(i) $1 \leqslant \xi < 4$。取 M_2 充分小，使得 $C_{10}M_2^2 < a_1$。注意到 $M_1 < M_2$，由(10.2.20)可以得到

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla^4 u_N\|^2 + a_1\|\nabla^6 u_N\|^2 + a\|\nabla^5 u_N\|^2$$
$$\leqslant C_{10}M_2^{\rho_1}(\|\nabla^6 u_N\|^{\frac{3}{2}} + \|\nabla^6 u_N\|^{\frac{5}{3}} + \|\nabla^6 u_N\|^{\frac{7}{6}}$$
$$+ \|\nabla^6 u_N\|^{\frac{11}{6}} + \|\nabla^6 u_N\|^{\frac{4}{3}} + \|\nabla^6 u_N\|$$
$$+ \|\nabla^6 u_N\|^{\frac{\xi}{6}+\frac{4}{3}} + \|\nabla^6 u_N\|^{\frac{\xi}{6}+1} + \|\nabla^6 u_N\|^{\frac{\xi}{6}+\frac{5}{6}}) \tag{10.2.21}$$

其中 $M_2^{\rho_1} = \max\{M_2^3, M_2, M_2^{\frac{5\xi}{6}+\frac{7}{6}}, M_2^{\frac{5\xi}{6}+\frac{1}{6}}M_2^{\xi+\frac{1}{2}}, M_2^{\xi+1}\}$。利用 Young 不等式，从(10.2.21)可以知道

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla^4 u_N\|^2 + \frac{1}{2}(a_1 - C_{10}M_2^2)\|\nabla^6 u_N\|^2 + a_2\|\nabla^5 u_N\|^2$$
$$\leqslant C_{11}(\frac{M_2^{4\rho_1}}{(a_1 - C_{10}M_2^2)^3} + \frac{M_2^{6\rho_1}}{(a_1 - C_{10}M_2^2)^5} + \frac{M_2^{\frac{12}{5}\rho_1}}{(a_1 - C_{10}M_2^2)^{\frac{7}{5}}}$$
$$\frac{M_2^{12\rho_1}}{(a_1 - C_{10}M_2^2)^{11}} + \frac{M_2^{3\rho_1}}{(a_1 - C_{10}M_2^2)^2} + \frac{M_2^{2\rho_1}}{(a_1 - C_{10}M_2^2)^2}$$
$$+ \frac{M_2^{\frac{12\rho}{4-\xi}}}{(a_1 - C_{10}M_2^2)^{\frac{\xi+8}{4-\xi}}} + \frac{M_2^{\frac{12\rho}{6-\xi}}}{(a_1 - C_{10}M_2^2)^{\frac{\xi+6}{6-\xi}}} + \frac{M_2^{\frac{12\rho}{7-\xi}}}{(a_1 - C_{10}M_2^2)^{\frac{\xi+5}{7-\xi}}}$$
$$= C_{12}(M_2). \tag{10.2.22}$$

显然，$C_{12}(M_2)$ 满足下面的性质：

(a) 当 $C_{10}M_2^2 < a_1$ 时，$C_{12}(M_2)$ 关于 M_2 是一个正的非减的函数；

(b) $\lim\limits_{M_2\to\infty} C_{12}(M_2) = C_{12}(0) = 0$。

记 $C_i(M_2)$ 表示关于 M_2 具有上述性质(a)和性质(b)的常数。(10.2.22)式两端在 $[0, \omega]$ 上积分，利用积分中值定理，存在 $t_2 \in (0, \omega)$，使得

$$\| \nabla^6 u_N(\cdot, t_2) \|^2 \leqslant \frac{2C_{12}(M_2)}{a_1 - C_{10}M_2^2}, \qquad (10.2.23)$$

由(10.2.18)和(10.2.23)，可以得到

$$\begin{aligned} \| \nabla^4 u_N(\cdot, t_2) \|^2 &\leqslant C_{13}(M_2^{\frac{2}{3}} \| \nabla^6 u_N(\cdot, t_2) \|^2 + M_2^2) \\ &\leqslant C_{13}\{ M_2^{\frac{2}{3}} (\frac{2C_{12}(M_2)}{a_1 - C_{10}M_2^2})^{\frac{2}{3}} + M_2^2 \} = C_{14}(M_2). \end{aligned}$$

(10.2.24)

再对(10.2.22)式两端在 $[t_2, t+\omega]$ ($\forall t \in [0, \omega]$) 上积分，并利用(10.2.24)，可以得到

$$\begin{aligned} \| \nabla^4 u_N(\cdot, t) \|^2 &\leqslant \| \nabla^4 u_N(\cdot, t_2) \|^2 + 4\omega C_{12}(M_2) \\ &\leqslant C_{14}(M_2) + 4\omega C_{12}(M_2) = C_{15}(M_2). \end{aligned} \qquad (10.2.25)$$

(i) $\xi = 4$。在这种情况下，(10.2.20)成为如下形式

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}\frac{d}{dt} \| \nabla^4 u_N \|^2 + a_1 \| \nabla^6 u_N \|^2 + a_2 \| \nabla^5 u_N \|^2 \\ &\leqslant C_{10}(M_2^2 \| \nabla^6 u_N \|^2 + M_2^{\frac{5}{2}} \| \nabla^6 u_N \|^{\frac{3}{2}} + M_2^{\frac{7}{3}} \| \nabla^6 u_N \|^{\frac{5}{3}} \\ &\quad + M_2^{\frac{17}{6}} \| \nabla^6 u_N \|^{\frac{7}{6}} + M_2^{\frac{13}{6}} \| \nabla^6 u_N \|^{\frac{11}{6}} + M_2^{\frac{8}{3}} \| \nabla^6 u_N \|^{\frac{4}{3}} \\ &\quad + M_3^3 \| \nabla^6 u_N \| + M_2^{\frac{5}{3}} \| \nabla^6 u_N \|^{\frac{5}{3}} + M_2^{\frac{7}{6}} \| \nabla^6 u_N \|^{\frac{11}{6}}) \\ &\quad + C_{10}(M_2^4 \| \nabla^6 u_N \|^2 + M_2^{\frac{13}{3}} \| \nabla^6 u_N \|^{\frac{5}{3}} + M_2^{\frac{10}{3}} \| \nabla^6 u_N \|^{\frac{4}{3}} \\ &\quad + 2M_2^{\frac{9}{2}} \| \nabla^6 u_N \|^{\frac{3}{2}} + M_2^5 \| \nabla^6 u_N \| + M_2 \| \nabla^6 u_N \|). \end{aligned}$$

(10.2.26)

取 M_2 充分小，使得 $C_{10}(M_2^2 + M_2^4) < a_1$，由(10.2.26)可以得到

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt} \| \nabla^4 u_N \|^2 + [a_1 - C_{10}(M_2^2 + M_2^4)] \| \nabla^6 u_N \|^2 + a_2 \| \nabla^5 u_N \|^2$$

$$\leqslant C_{16}M_2^{\rho_2}(\|\nabla^6 u_N\|^{\frac{3}{2}}+\|\nabla^6 u_N\|^{\frac{5}{3}}$$
$$+\|\nabla^6 u_N\|^{\frac{7}{6}}+\|\nabla^6 u_N\|^{\frac{4}{3}}+\|\nabla^6 u_N\|^{\frac{11}{6}}+\|\nabla^6 u_N\|),\tag{10.2.27}$$

其中 $\rho_2=\begin{cases}5, & M_2\geqslant 1\\ 1, & 0<M_2<1.\end{cases}$ 利用 Young 不等式，由(10.2.27)可以得到

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla^4 u_N\|^2+\frac{1}{2}[a_1-C_{10}(M_2^2+M_2^4)]\|\nabla^6 u_N\|^2+a_2\|\nabla^5 u_N\|^2$$
$$\leqslant C_{17}\Big\{\frac{M_2^{4\rho_2}}{(a_1-C_{10}M_2^2-C_{10}M_2^4)^3}$$
$$+\frac{M_2^{6\rho_2}}{(a_1-C_{10}M_2^2-C_{10}M_2^4)^5}+\frac{M_2^{\frac{12\rho_2}{5}}}{(a_1-C_{10}M_2^2-C_{10}M_2^4)^{\frac{7}{5}}}$$
$$+\frac{M_2^{12\rho_2}}{(a_1-C_{10}M_2^2-C_{10}M_2^4)^{11}}+\frac{M_2^{3\rho_2}}{(a_1-C_{10}M_2^2-C_{10}M_2^4)^2}$$
$$+\frac{M_2^{2\rho_2}}{(a_1-C_{10}M_2^2-C_{10}M_2^4)^2}\Big\}=C_{18}(M_2)\tag{10.2.28}$$

(10.2.28)式两端在 $[0,\omega]$ 上积分，利用积分中值定理，存在 $t_3\in(0,\omega)$，使得

$$\|\nabla^6 u_N(\cdot,t_3)\|^2\leqslant\frac{2C_{18}(M_2)}{a_1-C_{10}M_2^2-C_{10}M_2^4}.\tag{10.2.29}$$

由(10.2.18)和(10.2.29)，可以得到

$$\|\nabla^4 u_N(\cdot,t_3)\|^2\leqslant C_{19}(M_2^{\frac{2}{3}}\|\nabla^6 u_N(\cdot,t_3)\|^{\frac{4}{3}}+M_2^2)$$
$$\leqslant C_{19}\Big\{M_2^{\frac{2}{3}}\Big(\frac{2C_{18}(M_2)}{a_1-C_{10}M_2^2-C_{10}M_2^4}\Big)^{\frac{2}{3}}+M_2^2\Big\}$$
$$=C_{20}(M_2).\tag{10.2.30}$$

再对(10.2.28)式两端在 $[t_3,t+\omega]$（$\forall t\in[0,\omega]$）上积分，并利用(10.2.30)，可以得到

$$\|\nabla^4 u_N(\cdot,t)\|^2\leqslant\|\nabla^4 u_N(\cdot,t_3)\|^2+4\omega C_{18}(M_2)$$

$$\leqslant C_{20}(M_2)+4\omega C_{18}(M_2), \qquad (10.2.31)$$

由(10.2.25)和(10.2.31)，可以知道，当$1\leqslant\xi\leqslant 4$并且M_2充分小时，总是成立着不等式

$$\|\nabla^4 u_N(\cdot,t)\|^2\leqslant C_{21}(M_2). \qquad (10.2.32)$$

(10.2.5)和(10.2.32)式表明

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant\omega}\|u_N(\cdot,t)\|_{H^4}^2\leqslant C_{22}(M_2). \qquad (10.2.33)$$

利用Sobolev空间的嵌入定理，由(10.2.33)式可以得到

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant\omega}\|u_N(\cdot,t)\|_{C^2(\bar\Omega)}\leqslant C_{23}(M_2),$$

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant\omega}\|\nabla^3 u_N(\cdot,t)\|_{\infty}\leqslant C_{23}(M_2). \qquad (10.2.34)$$

两端乘以$\alpha'_{Nj}(t)$，然后对$j=1,2,\cdots,N$求和，利用Holder不等式和Young不等式，并注意到(10.2.33)，(10.2.34)，可得

$$\begin{aligned}\|u_{Nt}\|^2&=(-a_1\nabla^4u_N+a_2\nabla^2u_N+a\nabla^2u_N^3+G(u_N)+f,u_{Nt})\\&\leqslant(a_1\|\nabla^4u_N\|+a_2\|\nabla^2u_N\|)\|u_{Nt}\|\\&\quad+(6a\|u_N\|_{C(\bar\Omega)}\|\nabla u_N\|_{C(\bar\Omega)}\|\nabla u_N\|\\&\quad+3a\|u_N\|_{C(\bar\Omega)}^2\|\nabla^2u_N\|)\|u_{Nt}\|\\&\quad+A\|u_N\|_{C(\bar\Omega)}^{\xi}\|u_N\|\|u_{Nt}\|+\|f\|\|u_{Nt}\|\\&\leqslant C_{24}(M_2)+\frac{1}{2}\|u_{Nt}\|^2.\end{aligned} \qquad (10.2.35)$$

这表明

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant\omega}\|u_{Nt}(\cdot,t)\|_{H^4}^2\leqslant C_{25}(M_2).$$

(10.2.1)两端对t求导，得到

$$(u_{Ntt}+a_1\nabla^4u_{Nt}-a_2\nabla^2u_{Nt}=(a\nabla^2(u_N^3)_t+G(u_N)_t+f,u_{Nt}),$$

$$j=1,2,\cdots,N. \quad (10.2.36)$$

(10.2.36)式两端同乘以$-\lambda_j^3\alpha'_{Nj}(t)$，并对$j=1,2,\cdots,N$求和，通过分部积分，利用可以得到

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla^3u_{Nt}\|^2+a_1\|\nabla^5u_{Nt}\|^2+a_2\|\nabla^6u_{Nt}\|^2$$

$$=(a\nabla^2(u_N^3)_t+\nabla G(u_N)_t+\nabla f_t,\nabla^5u_{Nt})$$

$$
\begin{aligned}
&= a(18\nabla u_N\nabla^2 u_N\nabla u_{Nt} + 12(\nabla u_N)^2\nabla^2 u_{Nt} \\
&\quad + 6u_N\nabla^3 u_N\nabla u_{Nt} + 12u_N\nabla^2 u_N\nabla^2 u_{Nt} + 6u_N\nabla u_N\nabla^3 u_{Nt} \\
&\quad + 6(\nabla u_N)^2\nabla u_{Nt} + 6u_N\nabla^2 u_N\nabla u_{Nt} + 12u_N\nabla u_N\nabla^2 u_{Nt} \\
&\quad + 3u_N^2\nabla^3 u_{Nt} + G''(u_N)\nabla u_N u_{Nt} + G'(u_N)\nabla u_{Nt} + \nabla f_t,\ \nabla^5 u_{Nt}) \\
&\leqslant \{18a\|\nabla u_N\|_{C(\bar\Omega)}\|\nabla^2 u_N\|_{C(\bar\Omega)}\|\nabla u_{Nt}\| \\
&\quad + 12a\|(\nabla u_N)\|^2_{C(\bar\Omega)}\|\nabla^2 u_{Nt}\| \\
&\quad + 6a\|u_N\|_{C(\bar\Omega)}\|\nabla^3 u_N\|_\infty\|\nabla u_{Nt}\| \\
&\quad + 12a\|u_N\|_{C(\bar\Omega)}\|\nabla^2 u_N\|_{C(\bar\Omega)}\|\nabla^2 u_{Nt}\| \\
&\quad + 6a\|u_N\|_{C(\bar\Omega)}\|\nabla u_N\|_{C(\bar\Omega)}\|\nabla^3 u_N\| \\
&\quad + 6a\|\nabla u_N\|^2_{C(\bar\Omega)}\|\nabla u_{Nt}\| \\
&\quad + 6a\|u_N\|_{C(\bar\Omega)}\|\nabla^2 u_N\|_{C(\bar\Omega)}\|\nabla u_{Nt}\| \\
&\quad + 12a\|u_N\|_{C(\bar\Omega)}\|\nabla u_N\|_{C(\bar\Omega)}\|\nabla^2 u_{Nt}\| \\
&\quad + 3a\|u_N\|^2_{C(\bar\Omega)}\|\nabla^3 u_{Nt}\| + A\|u_N\|^{\xi-1}_{C(\bar\Omega)}\|\nabla u_N\|_{C(\bar\Omega)}\|u_{Nt}\| \\
&\quad + A\|u_N\|^{\xi}_{C(\bar\Omega)}\|\nabla u_{Nt}\| + \|\nabla f_t\|\}\|\nabla^5 u_{Nt}\|
\end{aligned}
\tag{10.2.37}
$$

利用 Gagliardo－Nirenberg 不等式，有

$$
\|\nabla^j u_{Nt}\|^2 \leqslant C_{26}(\|u_{Nt}\|^{1-\frac{j}{5}}\|\nabla^j u_{Nt}\|^{\frac{j}{5}} + \|u_{Nt}\|),\quad j = 1,2,3. \tag{10.2.38}
$$

把(10.2.38)代入(10.2.37)并利用 Young 等式，得到

$$
\frac{d}{dt}\|\nabla^3 u_{Nt}\|^2 + a_1\|\nabla^5 u_{Nt}\|^2 + 2a_2\|\nabla^6 u_{Nt}\|^2 \leqslant C_{27}(M_2). \tag{10.2.39}
$$

(10.2.39)式两端在 $[0,\omega]$ 上积分，并且利用积分中值定理，存在 $t_4\in(0,\omega)$，使得

$$
\|\nabla^5 u_{Nt}(\cdot,t_4)\|^2 \leqslant \frac{C_{27}(M_2)}{a_1}, \tag{10.2.40}
$$

由(10.2.38)和(10.2.40)式知道，如下估计式成立：

$$
\|\nabla^3 u_{Nt}(\cdot,t_4)\|^2 \leqslant C_{28}(M_2). \tag{10.2.41}
$$

(10.2.39)式两端在 $[t_4, t+\omega]$($\forall t \in [0, \omega]$) 上积分，并注意到(10.2.41)，有

$$\sup_{0\leq t\leq\omega}\|\nabla^3 u_{Nt}\|^2 \leq \|\nabla^3 u_{Nt}(\cdot, t_4)\|^2 + 2\omega C_{27}(M_2) \leq C_{29}(M_2), \tag{10.2.42}$$

(10.2.33)，(10.2.35)和(10.2.42)表明(10.2.11)成立。引理得证。

引理 10.2.4 假定 $H(z_0, z_1, \cdots, z_l)$ 关于变量 $z_0, z_1, \cdots, z_l$ 是 k ($k \geq 1$)次连续可微的，$z_j(x, t) \in L_\infty(\widetilde{Q}_T) \cap L_2([0, T]; H^k(\widetilde{\Omega}))$，$j = 0, 1, \cdots, l$。则

$$\left\| \frac{\partial^k H}{\partial x_1^{k_1}\partial x_2^{k_2}\cdots\partial x_n^{k_n}} \right\|_{L^2(\widetilde{\Omega})}^2 \leq C(M, k, l)\sum_{j=1}^{l}\|z_j\|_{H^k(\widetilde{\Omega})}^2,$$

其中，$M = \max\limits_{j=0,1,\cdots,l}\max\limits_{(x,t)\in\widetilde{Q}_T}\left|z_j(x, t)\right|$，$\widetilde{Q}_T = \{x = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \widetilde{\Omega} \subset R^n, t \in [0, T]\}$，$\widetilde{\Omega}$ 是 R^n 中的有界区域，$\bar{k} = \{x = (k_1, k_2, \cdots, k_n), k_j \geq 0, \left|\bar{k}\right| = \sum\limits_{j=1}^{n} k_j$.

引理 10.2.5 假定引理 10.2.3 的条件以及下面的条件成立：

1. $G(s) \in C^6(R)$，$G''(0) = G^{(4)}(0) = 0$；

2. $f \in C_\omega(R; H^6(\Omega)) f_t \in C_\omega(R; H^4(\Omega))$，$\nabla^2 f\Big|_{\partial\Omega} = \nabla^4 f\Big|_{\partial\Omega} = \nabla^2 f_t\Big|_{\partial\Omega} = 0$，$M_3 = \sup\limits_{0\leq t\leq\omega}(\|f\|_{H^6} + \|f_t\|_{H^4})$. 问题(10.1.2)－(10.1.4)的近似解 $u_N(x, t)$ 满足

$$\sup_{0\leq t\leq\omega}(\|u_{Ntt}(\cdot, t)\|_{H^2}^2 + \|u_{Nt}(\cdot, t)\|_{H^6}^2 + \|u_N(\cdot, t)\|_{H^8}^2) \leq C_{30}(M_3). \tag{10.2.43}$$

这里及以下出现的 $C_i(M_3)$ 表示与 N 无关的常数。

证明 (10.2.1)两端同乘以 $\lambda_j^8\alpha_{Nj}(t)$，然后对 $j = 1, 2, \cdots, N$ 求和，利用分部积分和 Holder 不等式，得到

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla^8 u_N\|^2 + a_1\|\nabla^{10} u_N\|^2 + a_2\|\nabla^9 u_N\|^2$$

$$= a(\nabla^8 u_N^3 + \nabla^6 G(u_N) + \nabla^6 f,\ \nabla^{10} u_N)$$
$$\leqslant a(\|\nabla^8 u_N^3\| + \|\nabla^6 G(u_N)\| + \|\nabla^6 f\|)\|\nabla^{10} u_N\|, \tag{10.2.44}$$

注意到(10.2.34)和 $M_2 < M_3$，可以得到

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant\omega}\|u_N(\cdot,t)\|_{C^2(\bar{\Omega})} \leqslant C_{23}(M_2) \leqslant C_{23}(M_3), \tag{10.2.45}$$

对(10.2.44)利用引理 10.2.3，注意到(10.2.45)，可以得到

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla^8 u_N\|^2 + a_1\|\nabla^{10}u_N\|^2 + a_2\|\nabla^9 u_N\|^2 \leqslant C_{31}(M_3)(\|u_N\|_{H^8}+1)\|\nabla^{10}u_N\|, \tag{10.2.46}$$

利用 Gagliardo－Nirenberg 不等式，得

$$\|\nabla^8 u_N\|^2 \leqslant C_{32}(\|u_N\|^{\frac{1}{5}}\|\nabla^{10}u_N\|^{\frac{4}{5}} + \|u_N\|)$$
$$\leqslant C_{33}(M_1^{\frac{1}{5}}\|\nabla^{10}u_N\|^{\frac{4}{5}} + M_1)$$
$$\leqslant C_{34}(M_3)(\|\nabla^{10}u_N\|^{\frac{4}{5}}+1), \tag{10.2.47}$$

利用 Young 不等式和(10.2.47)，由(10.2.46)式可得

$$\frac{d}{dt}\|\nabla^8 u_N\|^2 + a_1\|\nabla^{10}u_N\|^2 + 2a_2\|\nabla^9 u_N\|^2 \leqslant C_{35}(M_3), \tag{10.2.48}$$

(10.2.48)式两端在 $[0,\omega]$ 上积分，利用积分中值定理，存在 $t_5\in(0,\omega)$，使得

$$\|\nabla^{10}u(\cdot,t_5)\|^2 \leqslant \frac{C_{35}(M_3)}{a_1}. \tag{10.2.49}$$

由(10.2.47)和(10.2.49)式可得

$$\|\nabla^8 u(\cdot,t_5)\|^2 \leqslant C_{36}(M_3). \tag{10.2.50}$$

再对(10.2.48)式两端在 $[t_5, t+\omega]$（$\forall t\in[0,\omega]$）上积分，并注意到(10.2.50)式，可得

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant\omega}\|\nabla^8 u_N(\cdot,t)\|^2 \leqslant \|\nabla^8 u(\cdot,t_5)\|^2 + 2\omega C_{35}(M_3) \leqslant C_{37}(M_3). \tag{10.2.51}$$

利用 Sobolev 嵌入定理，由(10.2.11)可得

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant \omega}\|u_{Nt}(\cdot,t)\|_{C^1(\bar{\Omega})}\leqslant C_{38}\|u_{Nt}(\cdot,t)\|_{H^3}\leqslant C_{39}(M_3). \tag{10.2.52}$$

(10.2.36)两端乘以 $\lambda_j^6\alpha'_{Nj}(t)$，然后对 $j=1,2,\cdots,N$ 求和，利用分部积分和 Holder 不等式，并使用引理 10.2.4 和(10.2.45)，以及(10.2.52)式，可以得到

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla^6 u_{Nt}\|^2+a_1\|\nabla^8 u_{Nt}\|^2+a_2\|\nabla^7 u_{Nt}\|^2\\
&=a(\nabla^6(u_N^3)_t+\nabla^4 G(u_N)_t+\nabla^4 f_t,\nabla^8 u_{Nt})\\
&=(3a\nabla^6(u_N^2u_{Nt})+\nabla^4 G'(u_N)u_{Nt}+\nabla^4 f_t,\nabla^8 u_{Nt})\\
&\leqslant(3a\|\nabla^6(u_N^2u_{Nt})\|+\|\nabla^4 G'(u_N)u_{Nt}\|\\
&\quad+\|\nabla^4 f_t\|)\|\nabla^8 u_{Nt}\|\leqslant C_{40}(M_3)(\|u_N\|_{H^6}\\
&\quad+\|u_{Nt}\|_{H^6}+1)\|\nabla^8 u_{Nt}\|
\end{aligned} \tag{10.2.53}$$

利用 Gagliardo - Nirenberg 不等式，并注意到(10.2.11)，可得

$$\begin{aligned}
\|\nabla^6 u_{Nt}\|&\leqslant C_{41}(\|u_{Nt}\|^{\frac{1}{4}}\|\nabla^8 u_{Nt}\|^{\frac{3}{4}}+\|u_{Nt}\|)\\
&\leqslant C_{42}(M_3)(\|\nabla^8 u_{Nt}\|^{\frac{3}{4}}+1).
\end{aligned} \tag{10.2.54}$$

把(10.2.11)，(10.2.51)和(10.2.54)应用到(10.2.53)，并使用 Young 不等式，得到

$$\frac{d}{dt}\|\nabla^6 u_{Nt}\|^2+a_1\|\nabla^8 u_{Nt}\|^2+2a_2\|\nabla^7 u_{Nt}\|^2=C_{43}(M_3). \tag{10.2.55}$$

对(10.2.55)式两端在 $[0,\omega]$ 上积分，利用积分中值定理知道，存在 $t_6\in(0,\omega)$ 使得

$$\|\nabla^8 u_{Nt}(\cdot,t_6)\|^2\leqslant\frac{C_{43}(M_3)}{a_1}. \tag{10.2.56}$$

利用(10.2.54)式和(10.2.56)式可得

$$\|\nabla^6 u_{Nt}(\cdot,t_6)\|^2\leqslant C_{44}(M_3). \tag{10.2.57}$$

再对(10.2.55)式两端在 $[t_6,t+\omega]$($\forall t\in[0,\omega]$)，并注意到

(10.2.57)式，有

$$\sup_{0\le t\le\omega}\|\nabla^6 u_{Nt}(\cdot,t)\|^2\le\|\nabla^6 u_{Nt}(\cdot,t_6)\|^2+2\omega C_{42}(M_3)\le C_{45}(M_3).\qquad(10.2.58)$$

(10.2.36)两端同乘以 $\alpha''_{Nj}(t)$，并对 $j=1,2,\cdots,N$ 求和，利用 Holder 不等式，

$$\begin{aligned}\|u_{Ntt}(\cdot,t)\| &=(-a_1\nabla^4 u_{Nt}+a_2\nabla^2 u_{Nt}+a\nabla^2(u_N^3)_t+G(u_N)_t+f_t,u_{Ntt})\\&\le(a_1\|\nabla^4 u_{Nt}\|+a_2\|\nabla^2 u_{Nt}\|+a\|\nabla^2(u_N^3)_t\|+\|G(u_N)_t\|+\|f_t\|)\|u_{Ntt}(\cdot,t)\|.\end{aligned}\qquad(10.2.59)$$

利用引理 10.2.4 和 Cauchy 不等式，并注意到(10.2.11)，(10.2.45)和(10.2.52)，由(10.2.59)可以得到

$$\sup_{0\le t\le\omega}\|u_{Ntt}(\cdot,t)\|^2\le C_{46}(M_3).\qquad(10.2.60)$$

(10.2.36)两端同乘以 $\lambda_j^2\alpha''_{Nj}(t)$，并对 $j=1,2,\cdots,N$ 求和，利用分部积分和 Holder 不等式，可以得到

$$\begin{aligned}\|\nabla^2 u_{Ntt}\|^2 &=(-a_1\nabla^6 u_{Nt}+a_2\nabla^4 u_{Nt}+(a\nabla^4(u_N^3)_t+\nabla^2 G(u_N)_t+\nabla^2 f_t,\nabla^2 u_{Ntt})\\&\le(a_1\|\nabla^6 u_{Nt}\|+a_2\|\nabla^4 u_{Nt}\|+a\|\nabla^4(u_N^3)_t\|+\|\nabla^2 G(u_N)_t\|+\|\nabla^2 f_t\|)\|\nabla^2 u_{Ntt}(\cdot,t)\|.\end{aligned}\qquad(10.2.61)$$

注意到(10.2.11)，(10.2.45)，(10.2.52)和(10.2.58)，由(10.2.61)可以得到

$$\sup_{0\le t\le\omega}\|\nabla^2 u_{Ntt}(\cdot,t)\|^2\le C_{47}(M_3).\qquad(10.2.62)$$

由(10.2.11)，(10.2.51)，(10.2.58)，(10.2.60)和(10.2.62)式知道(10.2.43)式成立. 引理得证。

第三节 问题(10.1.2)－(10.1.4)解的存在性与唯一性

定理 10.3.1 假设引理 10.2.3 的条件成立，则问题

(10.1.2) - (10.1.4)存在广义的时间周期解 $u(x, t)$ 且满足

$$u(x, t) \in L_\omega^2(R;H^4(\Omega)), u_t(x, t) \in L_\omega^2(R;H^3(\Omega)) \tag{10.3.1}$$

和

$$\int_0^\omega \int_\Omega \{u_t + a_1 \nabla^4 u - a_2 \nabla^2 u - a \nabla^2 u^3 - G(u) - f\} \Phi \mathrm{d}x\mathrm{d}t = 0,$$
$$\forall \Phi \in L_\omega^2(R;L^2(\Omega)). \tag{10.3.2}$$

证明 在定理的条件下，(10.2.11)式成立. 利用 Sobolev 嵌入定理，可知下面的估计式成立

$$\sup_{0 \leq t \leq \omega} (\| u_{Nt}(\cdot, t) \|_{C^{1,\lambda}(\bar{\Omega})} + \| u_N(\cdot, t) \|_{C^{2,\lambda}(\bar{\Omega})}) \leq C_{48}(M_2), \tag{10.3.3}$$

其中 $0 \leq \lambda \leq \frac{1}{2}$。由(10.3.3)式和 Ascoli - Arzela 定理知，存在着函数 $u(x, t)$ 和 $\{u_N(x, t)\}$ 的子序列(还记作) $\{u_N(x, t)\}$ 满足：当 $N \to \infty$ 时，$\{u_N(x, t)\}$，$\{u_{Nx_1}(x, t)\}$ 和 $\{u_{Nx_2}(x, t)\}$ 在 $[0, \omega] \times \bar{\Omega}$ 上分别一致地收敛到 $u(x, t)$，$u_{x_1}(x, t)$ 和 $u_{x_2}(x, t)$；$\{u_{Nt}(x, t)\}$，$\{\nabla^2 u_N(x, t)\}$ 和 $\{\nabla^4 u_N(x, t)\}$ 分别在 $L_\omega^2(R;H^3(\Omega))$，$L_\omega^2(R;H^2(\Omega))$ 和 $L_\omega^2(R;L^2(\Omega))$ 中弱收敛于 $u_t(x, t)$，$\nabla^2 u(x, t)$ 和。由(10.2.11)知道，

$$\| u_N \|_{L_\omega^2(R;H^4(\Omega))} + \| u_{Nt} \|_{L_\omega^2(R;H^3(\Omega))} \leq C_{49}(M_2), \tag{10.3.4}$$

并且

$$H^4(\Omega) \searrow H^2(\Omega) \searrow L^2(\Omega),$$

其中 $H^4(\Omega) \searrow H^2(\Omega)$ 指的是空间 $H^4(\Omega)$ 嵌入空间 $H^2(\Omega)$，并且显然，此嵌入是紧嵌入，记

$$W = \{u \mid u \in L_\omega^2(R;H^4(\Omega)), u_t \in L_\omega^2(R;L^2(\Omega))\}.$$

由 Aubin 引理知，$W \searrow L_\omega^2(R;H^2(\Omega))$ 是紧的。利用定理的假定条件和(10.3.4)知道，存在 $\{u_N(x, t)\}$ 的子序列(还记作)

$\{u_N(x, t)\}$，满足当 $N \to \infty$ 时，$\{u_N(x, t)\}$ 在 $L^2_\omega(R;H^2(\Omega))$ 中收敛。根据上述的子序列的收敛性，$\{\nabla^2 u_N^3\}$ 在 $L^2_\omega(R;L^2(\Omega))$ 中弱收敛到 $\nabla^2 u^3$。事实上，对任意的 $w \in L^2_\omega(R;L^2(\Omega))$，有

$$\begin{aligned}
&\left|\int_0^\omega \int_\Omega (\nabla^2 u_N^3 - \nabla^2 u^3) w \mathrm{d}x\mathrm{d}t\right| \\
&= \left|\int_0^\omega \int_\Omega (6u_N(\nabla u_N)^2 + 3u_N^2 \nabla^2 u_N - 6u_N(\nabla u)^2 - 3u^2 \nabla^2 u) w \mathrm{d}x\mathrm{d}t\right| \\
&\leqslant \int_0^\omega \int_\Omega \{6|u_N - u||\nabla u_N|^2 |w| + 6|u||\nabla u_N + \nabla u| \\
&\quad |\nabla u_N - \nabla u||w| + 3|u_N + u||u_N - u||\nabla^2 u_N||w| \\
&\quad + 3|u|^2 |\nabla^2 u_N - \nabla^2 u||w|\}\mathrm{d}x\mathrm{d}t. \qquad (10.3.5)
\end{aligned}$$

注意到(10.3.3)以及

$$u(x, t), u_{x_1}(x, t), u_{x_2}(x, t) \in C([0, \omega] \times \overline{\Omega}),$$

由(10.3.5)式可以得到

$$\begin{aligned}
&\left|\int_0^\omega \int_\Omega (\nabla^2 u_N^3 - \nabla^2 u^3) w \mathrm{d}x\mathrm{d}t\right| \\
&\leqslant C_{50}(M_2)(\|u_N - u\|_{L^2((0,\omega)\times\Omega)} + \|\nabla u_N - \nabla u\|_{L^2((0,\omega)\times\Omega)} \\
&\quad + \|\nabla^2 u_N - \nabla^2 u\|_{L^2((0,\omega)\times\Omega)})\|w\|_{L^2((0,\omega)\times\Omega)}, \qquad (10.3.6)
\end{aligned}$$

由(10.3.6)式知，存在子序列 $\{u_N(x, t)\}$ 满足当 $N \to \infty$ 时，$\{\nabla^2 u_N^3\}$ 在 $L^2_\omega(R;L^2(\Omega))$ 中弱收敛于 $\nabla^2 u^3$。因而，问题(10.1.2) - (10.1.4)存在广义的周期解 $u(x, t)$ 并且 $u(x, t)$ 满足(10.3.1)和(10.3.2)。由(10.2.11)式知道

$$\|u\|_{C([0,\omega]\times\overline{\Omega})} + \|\nabla u\|_{C([0,\omega]\times\overline{\Omega})} \leqslant C_{51}(M_2). \qquad (10.3.7)$$

下面证明解的唯一性。假设 $u(x, t)$ 和 $v(x, t)$ 是问题(10.1.2) - (10.1.4)的两个广义解。置 $w(x, t) = u(x, t) - v(x, t)$，则 $w(x, t)$ 满足时间周期问题

$$w_t + a_1 \nabla^4 w - a_2 \nabla^2 w = a\nabla^2 u^3 - a\nabla^2 v^3 + G(u) - G(v),$$
$$x \in \Omega,\ t \in R, \qquad (10.3.8)$$

$$w(x, t) = \nabla^2 w(x, t) = 0,\ x \in \partial\Omega,\ t \in R, \qquad (10.3.9)$$

$$w(x, t + \omega) = w(x, t),\ x \in \Omega,\ t \in R, \qquad (10.3.10)$$

(10.3.8)式两端同乘以 $2w$ 并在区间 Ω 上关于变量 x 积分，通过利用积分中值定理，得到

$$\frac{d}{dt}\|w\|^2+2a_1\|\nabla^2 w\|^2+2a_2\|\nabla w\|^2\leqslant C_{52}(M_2)\|\nabla w\|^2, \tag{10.3.11}$$

取 M_2 充分小时，使得 $L=2a_2-C_{52}(M_2)>0$，利用引理 10.2.1，由(10.3.11)式可以得到

$$\frac{d}{dt}\|w\|^2\leqslant -L\|w\|^2,$$

这个式子表明对 $\forall t>0$，有 $\|w(\cdot,t)\|^2\leqslant\|w(\cdot,0)\|^2e^{-Lt}$。注意到 $w(x,t)$ 关于 t 的周期性，对 $\forall t\in R$，都存在自然数 N_0 使得 $t+N_0\omega>0$，并且

$$\|w(\cdot,t)\|^2=\|w(\cdot,t+N_0\omega)\|^2\leqslant\|w(\cdot,0)\|^2e^{-LN\omega},\ \forall N>N_0,$$

这表明

$$\|w(\cdot,t)\|=0,\ t\in R.$$

定理得证。

定理 10.3.2 在引理 10.2.5 的假定条件下，问题(10.1.2)-(10.1.4)存在唯一的古典解 $u(x,t)$.

证明 由引理 10.2.5，利用 Sobolev 嵌入定理，有

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant\omega}\left(\|u_{Ntt}(\cdot,t)\|^2_{C^{0,\lambda_1}(\bar\Omega)}+\|u_{Nt}(\cdot,t)\|^2_{C^{4,\lambda_1}(\bar\Omega)}+\|u_N(\cdot,t)\|^2_{C^{6,\lambda_1}(\bar\Omega)}\right)\leqslant C_{53}(M_3). \tag{10.3.12}$$

其中 $0<\lambda_1\leqslant\frac{1}{2}$。利用 Ascoli - Arzela 定理，由(10.3.12)知道，存在 $\{u_N(x,t)\}$ 的一个子序列(还记为 $\{u_N(x,t)\}$)以及函数 $u(x,t)$ 满足当 $N\to\infty$ 时，序列 $\{u_N(x,t)\}$，$\{\nabla^2u_N(x,t)\}$，$\{\nabla^4u_N(x,t)\}$ 以及 $\{u_{Nt}(x,t)\}$ 分别在 $[0,\omega]\times\bar\Omega$ 上一致地收敛到 $u(x,t)$，$\nabla^2u(x,t)$，$\nabla^4u(x,t)$ 和 $u_t(x,t)$ 到。容易知道 $u(x,t)$ 是问题(10.1.2)-(10.1.4)的古典解。由定理 10.3.1 中广义解的唯一性知，问题(10.1.2)-(10.1.4)的古典解是唯一

的。定理证毕。

参考文献

[1] D. S. Cohen and J. D. Murray. A generalized diffusion model for growth and dispersal in a population[J]. J. Math. Biol., 1981, 12: 237－249.

[2] 宋健，于景元. 人口控制论[M]. 北京：科学出版社，1985.

[3] Liu Baoping and C. V. Pao. Integral representation of generalized diffusion model in population problems[J]. Journal of Integral Equation, 1984, 6: 175－185.

[4] Chen Guowang. Classical global solution of the initial boundary value problems for a class of nonlinear parabolic equations[J]. Comment. Math. Univ. Carolinae, 1994, 35(3): 431－441.

[5] 陈国旺，孙和生. 广义 Ginzburg－Landau 型非线性高阶抛物型方程的 Cauchy 问题[J]. 数学年刊，1994, 15A(4): 482－492; Chin. J. Contemp. Math. [J], 1994, 15(3):275－285.

[6] 陈国旺. 人口问题中的三维 Ginzburg－Landau 模型方程的 Cauchy 问题[J]. 数学年刊，1999, 20A(2):143－150.

[7] 陈国旺，吕胜关. 人口问题中广义三维 Ginzburg－Landau 模型方程[J]. 应用数学学报，2000, 23(3): 41－51.

[8] 周毓麟，符鸿源. 广义 Sine－Gordon 型非线性高阶方程组[J]. 数学学报，1983, 26:234－249.

第十一章　一类广义 Swift－Hohenberg 模型方程的时间周期问题

第一节　引言

本章研究如下 Swift－Hohenberg 模型方程的时间周期问题。

$$u_t + \nabla^4 u + a_1 \nabla^2 u + a_2 u = f(u) + g(x, t), \ x \in \Omega, \ t \in R \tag{11.1.1}$$

$$u = \nabla^2 u = 0, \ x \in \partial\Omega, \ t \in R \tag{11.1.2}$$

$$u(x, t + T) = u(x, t), \ x \in \Omega, \ t \in R \tag{11.1.3}$$

其中，$a_1 > 0$，$a_2 \in R$ 和 $T > 0$ 都是常数；$u(x, t)$ 是关于变量 $x \in \Omega$ 和 $t \in R$ 的未知函数，$\Omega \subset R^2$ 是具有光滑边界 $\partial\Omega$ 的有界区域，$f(s)$ 是给定的非线性函数，$g(x, t)$ 是关于 t 以 T 为周期的函数。方程(11.1.1)作为标准的抛物型方程，其定解问题的讨论有诸多结果。

文中将采用下面的记号：本章中使用如下的记号：设 X 是 Banach 空间，$C_T^k(R;X)$ 表示定义在 R 上具有直到 k 阶连续导数的以 T 为周期且取值于 X 的函数构成的集合，其范数为

$$\|u\|_{C_T^k(R;X)} = \sup_{0 \leq t \leq T} \left\{ \sum_{i=1}^{k} \| D_t^i u \|_X \right\}$$

其中 $D_t = \dfrac{\partial}{\partial t}$，$\| \cdot \|_X$ 表示 X 中的范数。

用 $L_T^p(R;X)(1 \leq p \leq \infty)$ 表示定义在 R 上以 T 为周期取值于 X 的并且满足

$$\| u \|_{L_T^p(R;X)} = \left(\int_0^T \| u \|_X^p \mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p}} < \infty \ (1 \leq p < \infty)$$

$$\| u \|_{L_T^\infty(R,X)} = \operatorname{ess}\sup_{0 \leq t \leq \omega} \| u \|_X < \infty \quad (p = \infty)$$

的可测函数集。

$W_T^{k,p}(R;X)$ 表示关于 t 的直到 k 阶的偏导数都属于 $L_T^p(R;X)$ 的函数集合. $H^m(\Omega)$ 是通常的 Sobolev 空间；$(\cdot,\ \cdot)$ 表示 $L^2(\Omega)$ 中的内积. 为简单起见，用 $\|\cdot\|_p$ 及 $\|\cdot\|_{H^m}$ 分别表示 $L^p(\Omega)$ 和 $H^m(\Omega)$ 中的范数，特别地，$\|\cdot\|$ 表示 $\|\cdot\|_2$.

第二节 问题(11.1.1) – (10.1.3)的近似解的存在性及积分估计

设 $\{w_j(x)\}(j=1,2,\cdots)$ 是 $L^2(\Omega)$ 中的一标准正交基，由具有齐次边界条件 Ω 上的算子 $A=-\Delta$ 相应于特征值 $\lambda_j(j=1,2,\cdots)$ 的特征函数组成，且 $0<\lambda_1\leqslant\lambda_2\leqslant\cdots$，$\lim\limits_{j\to\infty}\lambda_j=\infty$。

设问题(11.1.1) – (11.1.3)有形如 $u_N(x,t)=\sum\limits_{j=1}^{N}\alpha_{Nj}(t)w_j(x)$ 的近似解，其中是待定系数，是正整数. 根据 Galerkin 方法，$\alpha_{Nj}(t)(j=1,2,\cdots,N)$ 应该满足如下常微分方程组的时间周期问题。

$$(u_{Nt}+\nabla^4u_N+a_1\nabla^2u_N+a_2u_N-f(u_N),\ w_j)=(g,\ w_j) \tag{11.2.1}$$

$$(u_N(x,t+T),\ w_j)=(u_N(x,t),\ w_j),\ j=1,2,\cdots,N \tag{11.2.2}$$

为了使用 Leray – Schauder 不动点定理证明问题(11.2.1)，(11.2.2)解 $\alpha_{Nj}(t)(j=1,2,\cdots,N)$ 的存在性，考虑如下带参数 θ 的常微分方程组的时间周期问题

$$(u_{Nt}+\nabla^4u_N+a_1\nabla^2u_N+a_2u_N,\ w_j)=\theta(f(u_N)+g,\ w_j) \tag{11.2.3}$$

$$(u_N(x,t+T),\ w_j)=(u_N(x,t),\ w_j)$$
$$j=1,2,\cdots,N,\ 0\leqslant\theta\leqslant1 \tag{11.2.4}$$

利用常数变易法容易证明如下引理。

引理 11.2.1 如果常数 a_1, a_2 满足 $a_1\lambda_1^{-1} + \left|a_2\right|\lambda_1^{-2} < 1$, 其中 λ_1 是算子 A 的第一特征值, 且 $h(x, t) \in L_T^{\infty}(R;L^2(\Omega))$, 则线性常微分方程组的周期问题

$$(u_{Nt} + \nabla^4 u_N + a_1\nabla^2 u_N + a_2 u_N, w_j) = (h(x,t), w_j) \tag{11.2.5}$$

$$(u_N(x,t+T), w_j) = (u_N(x,t), w_j), j = 1,2,\cdots,N \tag{11.2.6}$$

存在唯一的时间周期解 $\alpha_N(t) = (\alpha_{Nj}(t))_{j=1}^N$,并且

$$\alpha_{Nj}(t) = \frac{e^{-(\lambda_j^2-a_1\lambda_j+a_2)t}}{e^{(\lambda_j^2-a_1\lambda_j+a_2)T-1}}\int_t^{t+T} e^{(\lambda_j^2-a_1\lambda_j+a_2)\tau}F_j(\tau)d\tau \tag{11.2.7}$$

$$F_j(\tau) = \int_\Omega h(x,\tau)w_j(x)dx, \ j = 1,2,\cdots,N$$

关于问题(11.2.3), (11.2.4), 有如下引理。

引理 11.2.2 在引理 11.2.1 的条件下, 如果 $\int_\Omega f(s)sds \leqslant 0$, $g(x,t) \in L_T^{\infty}(R;L^2(\Omega))$, 记 $M_0 = \sup\limits_{0\leqslant t\leqslant T}\|g(t)\|$。则问题(11.2.3),(11.2.4)的任意解 $\alpha_N(t)$ 满足

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\|u_N(t)\|^2 \leqslant C_1M_0^2$$

其中, $C_1 > 0$ 是与 N 和 θ_1 都无关的常数。

证明 记 $a = 1 - a_1\lambda_1^{-1} - |a_2|\ \lambda_1^{-2}$。(11.2.3)式两端同乘以 $\alpha_{Nj}(t)$, 并对 $j = 1, 2, \cdots, N$ 求和, 得到

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_N(t)\|^2 + \|\nabla^2 u_N(t)\|^2$$

$$= a_1\|\nabla u_N(t)\|^2 - a_2\|u_N(t)\|^2 + \theta\int_\Omega(f(u_N) + g)u_N dx \tag{11.2.9}$$

注意到[2]

$$\|A^{\alpha}u\| \leqslant \lambda_1^{\alpha-\beta}\|A^{\beta}u\|,\ \forall u \in D(A^{\beta}),\ 0 \leqslant \alpha \leqslant \beta \tag{11.2.10}$$

由(11.2.9)式可得

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_N(t)\|^2 + \|\nabla^2 u_N(t)\|^2\\ &\quad \leqslant (a_1\lambda_1^{-1} + |a_2|\lambda_1^{-2})\|\nabla^2 u_N(t)\|^2\\ &\qquad + \lambda_1^{-1}\|g(t)\|\|\nabla^2 u_N(t)\|\end{aligned} \tag{11.2.11}$$

注意到 $a_1\lambda_1^{-1} + |a_2|\lambda_1^{-2} < 1$，利用 Cauchy 不等式，可得

$$\frac{d}{dt}\|u_N(t)\|^2 + a\|\nabla^2 u_N(t)\|^2 \leqslant \frac{\lambda_1^{-2}}{a}M_0^2 \tag{11.2.12}$$

(11.2.12)式两端在 $[0, T]$ 上积分，利用积分中值定理，$\exists t_1 \in (0, T)$，使得

$$\|\nabla^2 u_N(t_1)\|^2 \leqslant (a\lambda_1)^2 M_0^2 \tag{11.2.13}$$

由(11.2.10)和(11.2.13)得

$$\|u_N(t_1)\|^2 \leqslant \lambda_1^{-2}\|\nabla^2 u_N(t_1)\|^2 \leqslant (a\lambda_1^{-2})^2 M_0^2 \tag{11.2.14}$$

(11.2.12)两端再在 $[t_1, t+T]$（$\forall t \in [0, T]$）积分，并使用(11.2.14)式，就得到(11.2.8)式。引理得证。

利用文献[3]中的方法，使用 Leray - Schauder 不动点理论，问题(11.2.3)，(11.2.4)至少有一个解 $\alpha_N(t) = (\alpha_{Nj}(t))_{j=1}^{N}$。当 $\theta = 1$ 时，问题(11.2.3)，(11.2.4)的解就是问题(11.2.1)，(11.2.2)的解。根据线性常微分理论知道

$$\alpha_N(t) = (\alpha_{N1}(t), \alpha_{N2}(t), \cdots, \alpha_{NN}(t)) \in C_T^1(R)$$

从而，问题(11.1.1) - (11.1.3)的近似解 $u_N(x, t) \in C_T^1(R; W_N)$ 且满足一致估计(11.2.8)。这里 $W_N = span\{w_1, w_2, \cdots, w_N\}$。

引理 11.2.3　在引理 11.2.2 的条件下，如果 $f(s) \in C^1(R)$，$|f(s)| \leqslant A|s|^{\xi+1}$ 对 $\forall s \in R$ 成立，其中 $1 \leqslant \xi \leqslant \frac{8}{3}$ 和 $A > 0$ 是常数。

则问题(11.1.1) - (11.1.3)的近似解 $u_N(x, t)$ 满足

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\|u_N(\cdot, t)\|_{H^2}^2 \leqslant C_2(M_0), \sup_{0\leqslant t\leqslant T}\|u_N(\cdot, t)\|_{C(\bar{\Omega})}^2 \leqslant C_3(M_0) \tag{11.2.15}$$

其中 $C_2(M_0)$, $C_3(M_0)$ 都是与 N 无关的常数，并且是关于 M_0 的齐次多项式，同时关于 M_0 非减。

证明 (11.2.1)式两端同乘以 $\lambda_j^2\alpha_{Nj}(t)$，并对 $j = 1, 2, \cdots, N$ 求和，通过分部积分，有

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla^2 u_N(t)\|^2 + \|\nabla^4 u_N(t)\|^2 &\leqslant (a_1\lambda_1^{-1} + |a_2|\lambda_1^{-2})\|\nabla^4 u_N(t)\|^2 \\ &\quad + A(\|u_N(t)\|_\infty^\xi\|u_N(t)\| \\ &\quad + \|g(t)\|)\|\nabla^4 u_N(t)\|\end{aligned} \tag{11.2.16}$$

利用 Gagliardo - Nirenberg 不等式并注意到(11.2.8)式，可得

$$\|u_N(t)\|_\infty \leqslant C_3(M_0^{\frac{5}{8}}\|\nabla^4 u_N(t)\|^{\frac{3}{8}} + M_0) \tag{11.2.17}$$

由(11.2.16)和(11.2.17)得

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla^2 u_N(t)\|^2 + a\|\nabla^4 u_N(t)\|^2 \\ &\leqslant C_4(M_0^{\frac{5}{8}\xi+1}\|\nabla^4 u_N(t)\|^{\frac{3}{8}\xi+1} + M_0^{\xi+1}\|\nabla^4 u_N(t)\|) \\ &\quad + M_0\|\nabla^4 u_N(t)\|\end{aligned} \tag{11.2.18}$$

利用 Young 不等式，由(11.2.18)得到

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\|\nabla^2 u_N(t)\|^2 + a\|\nabla^4 u_N(t)\|^2 \\ &\leqslant C_5(M_0^{\frac{10\xi+16}{8-3\xi}} + M_0^{2\xi+2} + M_0^2) = C_6(M_0)\end{aligned} \tag{11.2.19}$$

(11.2.19)式两端在 $[0, T]$ 上积分，利用积分中值定理，存在 $t_2 \in (0, T)$，使得

$$\|\nabla^4 u_N(t_2)\|^2 \leqslant a^{-1}C_6(M_0) \tag{11.2.20}$$

由(11.2.10)和(11.2.20)，可以得到

$$\| \nabla^2 u_N(t_2) \|^2 \leqslant \lambda_1^{-2} \| \nabla^4 u_N(t_2) \|^2 \leqslant a^{-1}\lambda_1^{-2} C_6(M_0) \tag{11.2.21}$$

再对(11.2.19)式两端在 $[t_2, t+T](\forall t \in [0, T])$ 上积分，并利用(11.2.21)，可以得到

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant T} \| \nabla^2 u_N(t) \|^2 \leqslant (a^{-1}\lambda_1^{-2} + 2T) C_6(M_0) \tag{11.2.22}$$

注意到 $C_6(M_0)$ 的形式，由(11.2.8)和(11.2.22)式以及 Sobolev 嵌入定理可得(11.2.15)式。引理证毕。

引理 11.2.4 假定 $H(z_0, z_1, \cdots, z_l)$ 关于变量 $z_0, z_1, \cdots, z_l$ 是 k ($k \geqslant 1$)次连续可微的，

$z_j(x, t) \in L_\infty(\widetilde{Q}_T) \cap L_2([0, T]; H^k(\widetilde{\Omega}))$, $j = 0, 1, \cdots, l$。

则

$$\| \frac{\partial^k H}{\partial x_1^{k_1} \partial x_2^{k_2} \cdots \partial x_n^{k_n}} \|^2_{L^2(\widetilde{\Omega})} \leqslant C(M, k, l) \sum_{j=1}^{l} \| z_j \|^2_{H^k(\widetilde{\Omega})},$$

其中，

$$M = \max_{j=0,1,\cdots,l}\ \max_{(x,t)\in\widetilde{Q}_T} |z_j(x, t)|,\ \widetilde{Q}_T$$

$= \{x = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \widetilde{\Omega} \subset R^n, t \in [0, T]\}$，$\widetilde{\Omega}$ 是 R^n 中的有界区域，$\bar{k} = \{x = (k_1, k_2, \cdots, k_n), k_j \geqslant 0, \left|\bar{k}\right| = \sum_{j=1}^{n} k_j$。

引理 11.2.5 假定引理 11.2.3 的条件和如下条件成立：

(1) $f \in C^2(R)$，$f(0) = 0$；

(2) $\mathrm{g} \in \mathrm{L_T}^\infty(\mathrm{R}; \mathrm{H}^2(\Omega) \cap \mathrm{H_0}^{12}(\Omega))$，记 $M_1 = \sup_{0\leqslant t\leqslant T} \| g(t) \|_{H^2}$。

则问题(11.1.1) – (11.1.3)的近似解 $u_N(x, t)$ 满足

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant T} (\| u_{Nt}(t) \|^2 + \| u_N(t) \|^2_{H^4}) \leqslant C_7(M_1) \tag{11.2.23}$$

这里及以下出现的 $C_i(M_1)$ 表示与 N 无关的常数。

证明 (11.2.1)两端同乘以 $\lambda_j^4 \alpha_{Nj}(t)$，然后对 $j = 1, 2, \cdots,$

N求和，利用分部积分，得到

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla^4 u_N(t)\|^2+\|\nabla^6 u_N(t)\|^2$$
$$\leqslant(a_1\lambda_1^{-1}+|a_2|\lambda_1^{-2})\|\nabla^6 u_N(t)\|^2+(\|\nabla^2 f(u_N)\|+\|\nabla^2 g(t)\|)\|\nabla^6 u_N(t)\| \tag{11.2.24}$$

利用引理 11.2.4 和(11.2.15)的第二式，以及 $C_3(M_0)\leqslant C_3(M_1)$，由(11.2.24)式得

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla^4 u_N(t)\|^2+a\|\nabla^6 u_N(t)\|^2$$
$$\leqslant(C_8(M_1)\|u_N(t)\|_{H^2}+\|\nabla^2 g(t)\|)\|\nabla^6 u_N(t)\|. \tag{11.2.25}$$

利用 Cauchy 不等式由(11.2.25)可得

$$\frac{d}{dt}\|\nabla^4 u_N(t)\|^2+a\|\nabla^6 u_N(t)\|^2\leqslant C_9(M_1) \tag{11.2.26}$$

对(11.2.26)式两端在 $[0,T]$ 上积分，利用积分中值定理，存在 $t_3\in(0,T)$，使得

$$\|\nabla^6 u_N(t_3)\|^2\leqslant a^{-1}C_9(M_1) \tag{11.2.27}$$

由(11.2.10)和(11.2.27)可得

$$\|\nabla^4 u_N(t_3)\|^2\leqslant\lambda_1^{-2}\|\nabla^6 u_N(t_3)\|^2\leqslant a^{-1}\lambda_1^{-2}C_9(M_1) \tag{11.2.28}$$

再对(11.2.26)式两端在 $[t_3,t+T]$($\forall t\in[0,T]$)上积分，并利用(11.2.28)，可以得到

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\|\nabla^4 u_N(t)\|^2\leqslant(a^{-1}\lambda_1^{-2}+2T)C_9(M_1) \tag{11.2.29}$$

(11.2.1) 两端同乘以 $\alpha'_{Nj}(t)$，然后对 $j=1,2,\cdots,N$ 求和，得到

$$\|u_{Nt}(t)\|^2=-(\nabla^4 u_N+a_1\nabla^2 u_N+a_2 u_N,u_{Nt})+(f(u_N)+g,u_{Nt}) \tag{11.2.30}$$

利用引理 11.2.4，注意到(11.2.15)和(11.2.29)，使用 Cauchy 不等式，由(11.2.30)式得

$$\sup_{0\leq t\leq T}\| u_{Nt}(t)\|^2\leq C_{10}(M_1) \tag{11.2.31}$$

(11.2.15)，(11.2.29)和(11.2.31)表明(11.2.23)式成立。引理得证。

引理 11.2.6　假定下列条件成立：

(1) $a_1\lambda_1^{-1}+\left|a_2\right|\lambda_1^{-2}<1$；

(2) $f\in C^k(R)(k\geq 2)$，$\int_\Omega f(s)sds\leq 0$，$|f(s)|\leq A|s|^{\xi+1}$ $\forall s\in R$ 成立，其中 $1\leq\xi\leq\frac{8}{3}$ 和 $A>0$ 是常数；$f^{(2r)}(0)=0$，$r=0, 1, \cdots$，且 $2r<k$；

(3) $g\in L_T^\infty(R;H^k(\Omega))$ 且 $\nabla^{2r}g\big|_{\partial\Omega}=0$，$r=0, 1, \cdots$ 且 $2r<k$. 记 $M_1=\sup\limits_{0\leq t\leq T}\| g(t)\|_{H^k}^2$。

则问题(11.1.1)－(11.1.3)的近似解 $u_N(x, t)$ 满足

$$\sup_{0\leq t\leq T}(\| u_N(t)\|_{H^{k+2}}^2+\| u_{Nt}(t)\|_{H^{k-2}}^2)\leq C_{11}(M_2) \tag{11.2.32}$$

这里及以下出现的 $C_i(M_2)$ 表示与 N 无关的常数。

证明　用数学归纳法，对 k 进行归纳。当 $k=2$ 时，由引理 11.2.5 知结论正确。假设 $k=m$ 时，结论成立，即

$$\sup_{0\leq t\leq T}(\| u_N(t)\|_{H^{m+2}}^2+\| u_{Nt}(t)\|_{H^{m-2}}^2)\leq C_{11}(M_2). \tag{11.2.33}$$

(11.2.1)两端同乘以 $\lambda_j^{m+3}\alpha_{Nj}(t)$，然后对 $j=1,2,\cdots,N$ 求和，利用分部积分，得到

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla^{m+3}u_N(t)\|^2+\|\nabla^{m+5}u_N(t)\|^2$$
$$=a_1\|\nabla^{m+4}u_N(t)\|^2-a_2\|\nabla^{m+3}u_N(t)\|^2$$

$$+\int_{\Omega}(\nabla^{m+1}f(u_N)+\nabla^{m+1}g)\nabla^{m+5}u_N(t)\mathrm{d}x$$
$$\leqslant(a_1\lambda_1^{-1}+|a_2|\lambda_1^{-2})\|\nabla^{m+5}u_N(t)\|^2+(\|\nabla^{m+1}f(u_N)\|+\|\nabla^{m+1}g\|)\|\nabla^{m+5}u_N(t)\|,$$

即
$$\frac{1}{2}\frac{d}{\mathrm{d}t}\|\nabla^{m+3}u_N(t)\|^2+a\|\nabla^{m+5}u_N(t)\|^2\leqslant(\|\nabla^{m+1}f(u_N)\|+\|\nabla^{m+1}g\|)\|\nabla^{m+5}u_N(t)\| \tag{11.2.34}$$

注意到，利用 Sobolev 嵌入定理可知

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant T}(\|u_N(t)\|^2_{C(\bar{\Omega})}\leqslant C_{12}(M_2) \tag{11.2.35}$$

利用引理 11.2.4 和(11.2.35)式，并使用 Cauchy 不等式，由(11.2.34)得

$$\frac{1}{2}\frac{d}{\mathrm{d}t}\|\nabla^{m+3}u_N(t)\|^2+a\|\nabla^{m+5}u_N(t)\|^2\leqslant C_{13}(M_2) \tag{11.2.36}$$

对(11.2.36)式两端在 $[0, T]$ 上积分，利用积分中值定理，存在 $t_4\in(0, T)$，使得

$$\|\nabla^{m+5}u_N(t_4)\|^2\leqslant\frac{C_{13}(M_2)}{a} \tag{11.2.37}$$

由(11.2.10)和(11.2.37)可知

$$\|\nabla^{m+3}u_N(t_4)\|^2\leqslant\lambda_1^{-2}\|\nabla^{m+5}u_N(t_4)\|^2\leqslant a^{-1}\lambda_1^{-2}C_{13}(M_2) \tag{11.2.38}$$

再对(11.2.36)式两端在 $[t_4, t+T]$ $(\forall t\in[0, T])$ 上积分，并利用(11.2.38)，可以得到

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\|\nabla^{m+3}u_N(t)\|^2\leqslant(a^{-1}\lambda_1^{-2}+2T)C_{13}(M_2) \tag{11.2.39}$$

(11.2.1)两端同乘以 $\lambda_j^{m-1}\alpha_{Nj}'(t)$，然后对 $j=1, 2, \cdots, N$ 求和，利用分部积分得到

$$\|\nabla^{m-1}u_{Nt}(t)\|^2=-(\nabla^{m+3}u_N+a_1\nabla^{m+1}u_N+a_2\nabla^{m-1}u_N$$

$$+\nabla^{m-1}f(u_N)+\nabla^{m-1}g,\ \nabla^{m-1}u_{Nt})\tag{11.2.40}$$

利用引理 11.2.4，(11.2.33)以及(11.2.35)，并使用 Cauchy 不等式，由(11.2.40)得

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\|\nabla^{m-1}u_{Nt}(t)\|^2\leqslant C_{14}(M_2)\tag{11.2.41}$$

(11.2.33)，(11.2.38)和(11.2.41)式表明当 $k=m+1$ 时，(11.2.32)成立。引理得证。

引理 11.2.7　在引理 11.2.6 的条件下，如果 $g_t\in L_T^\infty(R;H^{k-6}(\Omega))$，并且 $\nabla^{2r}g_t\Big|_{\partial\Omega}=0$，$r=0,1,\cdots$，且 $2r<k-6$，则当 $k\geqslant 8$ 时，问题(11.1.1) – (11.1.3)的近似解 $u_N(x,t)$ 满足

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\|u_{Ntt}(t)\|_{H^{k-6})}^2\leqslant C_{15}(M_2,M_3)\tag{11.2.42}$$

其中 $C_{15}(M_2,M_3)$ 是依赖于 M_2，M_3 但不依赖于 N 的常数，$M_3=\sup\limits_{0\leqslant t\leqslant T}\|g_t(t)\|_{H^{k-6}}^2$.

证明　(11.2.1)式两端对 t 求导，得

$$(u_{Ntt},w_j)=(-\nabla^4u_{Nt}-a_1\nabla^2u_{Nt}-a_2u_{Nt}-f'(u_N)u_{Nt}+g_t,w_j)\tag{11.2.43}$$

(11.2.43)两端同乘以 $\lambda_j^{k-6}\alpha_{Nj}''(t)$，然后对 $j=1,2,\cdots,N$ 求和，利用分部积分，得到

$$\begin{aligned}\|\nabla^{k-6}u_{Ntt}\|^2=(&-\nabla^{k-2}u_{Nt}-a_1\nabla^{k-4}u_{Nt}-a_2\nabla^{k-6}u_{Nt}\\&+\nabla^{k-6}(f'(u_N)u_{Nt})+\nabla^{k-6}g_t,\ \nabla^{k-6}u_{Ntt})\end{aligned}\tag{11.2.44}$$

利用引理 11.2.6 和 Sobolev 嵌入定理得

$$\|u_N(t)\|_{C(\bar\Omega)}\|u_{Nt}(t)\|_{C(\bar\Omega)}\leqslant C_{16}(M_2)\tag{11.2.45}$$

利用引理 11.2.4 以及(11.2.45)式，由(11.2.44)可得

$$\begin{aligned}\|\nabla^{k-6}u_{Ntt}\|^2\leqslant[&C_{17}\|u_{Nt}\|_{H^{k-2}}+C_{18}(M_2)\|u_N\|_{H^{k-6}}\\&+\|u_{Nt}\|_{H^{k-6}})+\|\nabla^{k-6}g_t\|]\|\nabla^{k-6}u_{Ntt}\|\end{aligned}\tag{11.2.46}$$

利用(11.2.32)式，对(11.2.46)右端使用 Cauchy 不等式，得

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\|\nabla^{k-6}u_{Nt}\|^2\leqslant C_{19}(M_2,M_3) \tag{11.2.47}$$

注意到(11.2.10)式，由(11.2.47)式知道(11.2.42)成立。引理得证。

第三节 问题(11.1.2)-(11.1.3)解的存在性与唯一性

定理 11.3.1 在引理 11.2.6 的条件下，如果 $k=4$，则问题(11.1.1)-(11.1.3)存在整体广义解

$$u(x,t)\in L_T^2(R;H^6(\Omega)),\ u_t(x,t)\in L_T^2(R;H^2(\Omega)) \tag{11.3.1}$$

对 $\forall\varphi\in L_T^2(R;L^2(\Omega))$，有

$$\int_0^T\int_\Omega(u_t+\nabla^4u+a_1\nabla^2u+a_2u-f(u)-g(x,t))\varphi\mathrm{d}x\mathrm{d}t=0 \tag{11.3.2}$$

记 $M_0=\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\|g(t)\|^2$，$M_2=\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\|g_t(t)\|_{H^4}^2$。则当 M_0 充分小时，上述广义解是唯一的。

证明 在定理的假定条件下，问题(11.1.1)-(11.1.3)的近似解 $u_N(x,t)$ 满足

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant T}(\|u_N(t)\|_{C(\bar\Omega)}\leqslant C_{20}(M_0) \tag{11.3.3}$$

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant T}(\|u_N(t)\|_{H^6}^2+\|u_{Nt}(t)\|_{H^2}^2)\leqslant C_{21}(M_2) \tag{11.3.4}$$

其中 $C_{20}(M_0)$ 满足 $\forall\varepsilon>0$，只要 M_0 充分小，$C_{20}(M_0)<\varepsilon$。由(11.3.4)式和 Ascoli-Arzela 定理知，存在着函数 $u(x,t)$ 和 $\{u_N(x,t)\}$ 的子序列(还记作) $\{u_N(x,t)\}$ 满足：当 $N\to\infty$ 时，$\{u_N(x,t)\}$ 在 $[0,T]\times\bar\Omega$ 上分别一致地收敛到 $u(x,t)$，$\{u_N(x,t)\}$ 在 $L_T^2(R;H^6(\Omega))\cap L_T^2(R;H^2(\Omega))$ 中弱收敛于 $u(x,t)$。注意到 $H^6(\Omega)\searrow H^4(\Omega)\searrow H^2(\Omega)$，其中 $H^6(\Omega)\searrow$

$H^4(\Omega)$ 指的是空间 $H^6(\Omega)$ 嵌入空间 $H^4(\Omega)$，并且 $H^6(\Omega)\searrow H^4(\Omega)$ 是紧的。记

$$W=\{u\mid u\in L_T^2(R;H^6(\Omega)),\ u_t\in L_T^2(R;H^2(\Omega))\}.$$

利用 Aubin 紧性引理[4]知，$W\cdot L_T^2(R;H^4(\Omega))$ 是紧的。再注意到(11.3.4)式，存在$\{u_N(x,t)\}$的子序列(还记作)$\{u_N(x,t)\}$满足当 $N\to\infty$ 时，$\{u_N(x,t)\}$ 在 $[0,T]\times\bar{\Omega}$ 上分别一致地收敛到 $u(x,t)$；$\{\nabla^4u_N(x,t)\}$ 和 $\{\nabla^2u_N(x,t)\}$ 分别在 $L_T^2(R;L^2(\Omega))$ 中强收敛于 $\nabla^4u(x,t)$，$\nabla^2u(x,t)$；$\{u_{Nt}(x,t)\}$ 在$L_T^2(R;H^2(\Omega))$中弱收敛于 $u_t(x,t)$。

容易证明，$f(u_N)$ 在 $[0,T]\times\bar{\Omega}$ 上一致收敛于 $f(u)$。显然，$u(x,t)$ 是问题(11.1.1)－(11.1.3)的满足(11.3.1)和(11.3.2)的广义时间周期解，并且在古典意义下满足边界条件(11.1.2)和时间周期条件(11.1.3)。由(11.3.3)和 $\{u_N(x,t)\}$ 的一致收敛性，易知

$$\|u_N(t)\|_{C([0,T]\times\bar{\Omega})}\leqslant C_{22}(M_0)\qquad(11.3.5)$$

下面证明解的唯一性。假设 $u_1(x,t)$ 和 $u_2(x,t)$ 是问题(11.1.1)－(11.1.3)的两个广义解. 置 $U(x,t)=u_1(x,t)-u_2(x,t)$，则 $U(x,t)$ 满足时间周期问题

$$U_t+\nabla^4U+a_1\nabla^2U+a_2U=f(u_1)-f(u_2),\ x\in\Omega,\ t\in R\qquad(11.3.6)$$

$$U=\nabla^2U=0,\ x\in\partial\Omega,\ t\in R$$

$$U(x,t+T)=U(x,t),\ x\in\Omega,\ t\in R$$

(11.3.6)式两端同乘以 $2U$ 并在区间 Ω 上关于变量 x 积分，通过利用积分中值定理，得到

$$\frac{d}{dt}\|U(t)\|^2+2a\|\nabla^2U(t)\|^2=2\int_\Omega f'(u_2+\theta(u_1-u_2))U^2dx\leqslant C_{23}(M_0)\|U(t)\|^2\leqslant C_{23}(M_0)\lambda_1^{-2}\|\nabla^2U(t)\|^2\qquad(11.3.7)$$

取 M_0 充分小时，使得 $L=2a-C_{23}(M_0)\lambda_1^{-2}>0$，由(11.3.7)可得

$$\frac{d}{dt}\| U(t) \|^2 \leqslant -L\| \nabla^2 U(t) \|^2 \leqslant -L\lambda_1^2 \| U(t) \|^2 \tag{11.3.8}$$

(11.3.8)式表明对任意 $t > 0$，成立着 $\| U(t) \|^2 \leqslant \| U(0) \|^2 e^{-L\lambda_1^2 t}$。注意到 $U(x, t)$ 关于 t 的周期性，对 $\forall t \in R$，都存在自然数 N_0 使得 $t + N_0 T > 0$，并且

$$\| U(t) \|^2 = \| U(t + N_0 T) \|^2 \leqslant \| U(0) \|^2 e^{-L\lambda_1^2 NT}, \ \forall N > N_0$$

因而

$$\| U(t) \| = 0, \ t \in R$$

这表明广义解是唯一的。定理得证。

定理 11.3.2 在引理 11.2.7 的条件下，如果 $k \geqslant 8$，则问题(11.1.1)-(11.1.3)有古典时间周期解 $u(x, t)$。并且，如果 M_0 充分小，古典解是唯一的。

参考文献

[1] Vejvoda O. Partial Differential Equations: Time - periodic Solutions[M]. Hague, Boston, London: Martinus Nijhoff Publishers, 1982.

[2] Teman, R., Navier - Stokes Equations and Nonlinear Functional Analysis[M]. SIAM Philadelphia, PA, 1983.

[3] 周毓麟，符鸿源. 广义 Sine - Gordon 型非线性高阶方程组[J]. 数学学报, 1983, 26:234 -249.

[4] Lions J. L., Qie;qies Methode de Resolution des Probleme aux Non - lineaire[M]. Paris: Dunod Gauthier - Villars, 1969.

第十二章　一类高阶非线性发展方程的时间周期问题

第一节　引言

本章讨论在晶格动力学研究中提出的如下高阶非线性波动方程[1,2]的时间周期问题

$$u_{tt} - u_{xx} - \mu u_{xxxx} - a_1 u_{xxtt} = a_2(u_x^2)_x,\ 0 < x < 1,\ t \in R \tag{12.1.1}$$

$$u(0,\ t) = u(1,\ t) = u_x(0,\ t) = u_x(1,\ t) = 0,\ t \in R \tag{12.1.2}$$

$$u(x,\ t+\omega) = u(x,\ t),\ 0 < x < 1,\ t \in R \tag{12.1.3}$$

其中$\mu > 0$，$a_1 > 0$和$a_2 \neq 0$表示与平衡状态格点间距有关的物理常数，以及$\omega > 0$是常数。未知函数$u(x,\ t)$表示格点位移。此外，在非线性弹性杆应变孤立子波的研究中，也提出了类似于(12.1.1)的方程($\mu = 0$)[3,4]。

模型方程(12.1.1)属于 Boussinesq 型方程。关于对 Boussinesq 型方程行波解、孤立子解以及定解问题的研究情况参见文献[5-9]及其内相关参考文献。本文借助于文献[10]的方法，利用非线性泛函分析理论，证明问题(12.1.1)-(12.1.3)的任意周期为$\omega > 0$的时间周期弱解的存在性。

本文的内容安排如下：在第二节中，给出一些记号以及预备知识，并证明几个后面需要的引理；第三节给出问题(12.1.1)-(12.1.3)的时间周期弱解的定义，并证明时间周期弱解的存在性。

第二节　预备知识

定义二重指标集 $S \subset N_0^2 = \{(\alpha_1, \cdots \alpha_2) \mid \alpha_1$ 和 α_2 都是非负整数$\}$：

$$S = \{\alpha = (\alpha_1, \alpha_2) \mid (1, 0), (0, 1), (2, 0), (1, 1)\}.$$

对 $\forall \alpha \in S$，记 $\partial^\alpha u = \dfrac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x^{\alpha_1} \partial t^{\alpha_2}}$，$|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2$。例如，$\partial^{(2,0)} u = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$，$\partial^{(1,1)} u = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial t}$ 等。

如果 $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2)$ 是一个二重指标，记

$$[\lambda] = \{(\lambda_1, 0), (0, \lambda_2)\} \subset N_0^2.$$

定义

$$\bar{S} = \{\beta = (\beta_1, \beta_2) \in N_0^2 \mid \exists \alpha \in S, 使 \beta_1 \leqslant \alpha_1, \beta_2 = \alpha_2\}.$$

对于有限的二重指标集 S，定义相应的双线性型为

$$A(u, v) = \int_0^\omega \int_0^1 (u_t v_t - u_x v_x + \mu u_{xx} v_{xx} + a_1 u_{xt} v_{xt}) \mathrm{d}x\mathrm{d}t, \tag{12.2.1}$$

内积为

$$(u, v)_A = \int_0^\omega \int_0^1 (u_t v_t + u_x v_x + u_{xx} v_{xx} + u_{xt} v_{xt} + uv) \mathrm{d}x\mathrm{d}t, \tag{12.2.2}$$

以及相应的范数为

$$\|u\|_A = (\|u_t\|^2 + \|u_x\|^2 + \|u_{xx}\|^2 + \|u_{xt}\|^2 + \|u\|^2)^{\frac{1}{2}}, \tag{12.2.3}$$

其中 $\|\cdot\|$ 表示通常的 $L^2(\Omega)$ 范数，$\Omega = (0, 1) \times (0, \omega)$。对于二重指标集 S，定义各向异性的 Sobolev 空间 $H_0^S(\Omega)$ 为 $C_0^\infty(\Omega)$ 在范数 $\|\cdot\|_A$ 意义下的闭包。所谓“各向异性”是指对自变量 x 和 t

的偏导数阶数有所不同。

定义

$C_{0,\omega}^{\infty}((0,1)\times R)=\{u\in C^{\infty}((0,1)\times R)\ \big|\ u(\cdot,t)\in C_0^{\infty}(0,1),$

$\forall t\in R; u(x,t+\omega)=u(x,t),\ \forall x\in(0,1)\}$。$C_{0,\omega}^{\infty}(\Omega)$ 定义为所有满足 $\varphi\in C_{0,\ \omega}^{\infty}((0,1)\times(0,\omega))$ 的函数集合。$H_{0,\omega}^{S}(\Omega)$ 是 $C_{0,\omega}^{\infty}(\Omega)$ 在范数 $\|\cdot\|_A$ 意义下的闭包。

下面用 $H^m(\Omega)$ 表示通常的 Sobolev 空间 $W^{m,2}(\Omega)$。

引理 12.2.1　(Poincaré 不等式[10])设

$$\Omega=(0,1)\times(0,\omega),\ S\subset N_0^2,\ \beta=(\beta_1,\beta_2)\in\overline{S}.$$

则对 $\forall u\in H_{0,\omega}^{S}(\Omega)$，有 $\partial^{\beta}u\in L^2(\Omega)$；并且对每个满足 $\beta_2\leqslant\alpha_2$ 的 $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2)\in S$，存在着仅依赖于 Ω，α 的常数 $C>0$，使对 $\forall u\in H_{0,\omega}^{r}(\Omega)$，成立

$$\|\partial^{\beta}u\|\leqslant C\|\partial^{\alpha}u\|.$$

引理 12.2.2[11]设 $\lambda,\gamma\in N_0^2$，$2\leqslant q<\infty$，q 是正整数，

$$\theta(\gamma,q,\lambda)=\frac{\gamma_1+\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{q}}{\lambda_1}+\frac{\gamma_2+\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{q}}{\lambda_2},$$

这里规定 $\dfrac{0}{0}=1$，$\dfrac{c}{0}=\infty\,(c\neq0)$。若 $\theta\leqslant1$，则算子 $\partial^{\gamma}:H^{[\lambda]}(\Omega)\to L^q(\Omega)$ 是连续的，并且存在常数 $h_0>0$，$C_1>0$ 使得对任意 $h\in(0,h_0)$，成立估计式

$$\|\partial^{\gamma}u\|_{L^q(\Omega)}\leqslant C_1h^{1-\theta}(\|\partial_x^{\lambda_1}u\|+\|\partial_t^{\lambda_2}u\|)+C_1h^{-\theta}\|u\|.\tag{12.2.4}$$

引理 12.2.3　记 $\gamma=(1,0)\in N_0^2$，则算子 $\partial^{\gamma}:H_{0,\omega}^{S}(\Omega)\to L^3(\Omega)$ 是紧的。

证明　取 $\lambda=(2,1)\in N_0^2$ 和 $q=3$，易知 $\theta(\gamma,q,\lambda)=\dfrac{3}{4}<1.$ 由引理 12.2.2 知道，对任意充分小的 $\varepsilon>0$，存在常数 $C_\varepsilon>0$，使得

$$\|u_x\|_{L^3(\Omega)}\leqslant\varepsilon(\|u_{xx}\|+\|u_t\|+\|u\|)$$

$$+ C_\varepsilon \|u\| \leqslant \varepsilon \|u\|_A + C_\varepsilon \|u\|. \tag{12.2.5}$$

注意到

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} = [\|u_x\|^2 + \|u_t\|^2 + \|u\|^2]^{\frac{1}{2}} \leqslant \|u\|_A,$$

如果 $\{u_n\}_{n=1}^\infty$ 在 $H_{0,\omega}^S(\Omega)$ 中有界，则此序列必在 $H^1(\Omega)$ 中有界。

由于 $H^1(\Omega) \searrow L^2$（"$\searrow$"表示嵌入）是紧的，从而 $\{u_n\}_{n=1}^\infty$ 中存在子序列（仍记为）$\{u_n\}_{n=1}^\infty$ 在 $L^2(\Omega)$ 是 Cauchy 序列。

由(12.2.5)知，对 $\forall m, n \in Z^+$，

$$\begin{aligned}\|u_{mx} - u_{nx}\|_{L^3(\Omega)} &\leqslant \varepsilon \|u_m - u_n\|_A + C_\varepsilon \|u_m - u_n\| \\ &\leqslant 2\varepsilon M + C_\varepsilon \|u_m - u_n\|.\end{aligned} \tag{12.2.6}$$

其中 $M > 0$ 是常数。

在(12.2.6)中先令 $m, n \to \infty$，再令 $\varepsilon \to 0$，取极限得

$$\|u_{mx} - u_{nx}\|_{L^3(\Omega)} \to 0,$$

这表明 $\{u_{Nx}\}_{n=1}^\infty$ 是 $L^3(\Omega)$ 中的 Cauchy 序列。引理得证。

引理 12.2.4[12] 假定 $f: \Omega \times R \to R$ 是 Carath\'eodory 函数，即：对几乎每个 $y \in \Omega$，$f(y, \cdot)$ 连续；并且对每一个 $\xi \in R$，$f(\cdot, \xi)$ 是可测的。如果存在常数 $p_1, p_2 \geqslant 1$，$a > 0$ 以及函数 $b(y) \in L^{p_2}(\Omega)$，使得

$$\left|f(y, \xi)\right| \leqslant b(y) + a\left|\xi\right|^{\frac{p_1}{p_2}},$$

则复合函数算子

$$F_0(u(y)) = f(y, u(y)) : L^{p_1}(\Omega) \to L^{p_2}(\Omega)$$

是连续且有界的。

引理 12.2.5 如果 $f(x, t, u(x, t)) = u^2$，则 $f: L^3(\Omega) \to L^{\frac{3}{2}}(\Omega)$ 是连续有界的算子。

证明 记 $y = (x, t)$. 易知 $f(y, u(y)) = u^2(y)$ 是 Caratheodory 函数。取 $a = 1$，$p_1 = 3$，$p_2 = \dfrac{3}{2}$，$b(y) \equiv 0$，则成立着

$$|f(y, u(y))| \leqslant b(y) + a|u|^{\frac{p_1}{p_2}}.$$

根据引理 12.2.4，算子 $f(y, u(y)) : L^3(\Omega) \to L^{\frac{3}{2}}(\Omega)$ 是连续有界的。

引理得证。

引理 12.2.6　双线性型(12.2.1)满足如下两个不等式:

(1)$A(u, v) \leqslant C_0 \|u\|_A \|v\|_A,\ \forall u, v \in H^S_{0,\omega}(\Omega)$,

$$A(u, v) \leqslant C_0 \|u\|_A \|v\|_A,\ \forall u, v \in H^S_{0,\omega}(\Omega), \tag{12.2.7}$$

其中 $C_0 > 0$ 是常数。

(2)如果 $\mu > 1$, 则

$$A(u, v) \geqslant K_0 \|u\|_A^2,\ \forall u \in H^S_{0,\omega}(\Omega), \tag{12.2.8}$$

其中 $K_0 > 0$ 是常数。

证明　利用 Hölder 不等式, 得

$$\begin{aligned} A(u, v) &= \int_0^\omega \int_0^1 (u_t v_t - u_x v_x + \mu u_{xx} v_{xx} + a_1 u_{xt} v_{xt}) \mathrm{d}x\mathrm{d}t \\ &\leqslant (2 + \mu + a_1) \|u\|_A \|v\|_A,\ \forall u, v \in H^S_{0,\omega}(\Omega). \end{aligned}$$

利用引理 12.2.1, 知

$$\|u_x\|^2 \leqslant \|u_{xx}\|^2,\ \|u\|^2 \leqslant \|u_{xx}\|^2. \tag{12.2.9}$$

记 $\mu = \sum_{i=1}^{3} \mu_i$, $\mu_i > 0(i = 1, 2, 3)$ 且 $\mu_1 > 1$, 则

$$\begin{aligned} A(u, u) &= \|u_t\|^2 - \|u_x\|^2 + \mu \|u_{xx}\|^2 + a_1 \|u_{xt}\|^2 \\ &= \|u_t\|^2 - \|u_x\|^2 + (\mu_1 + \mu_2 + \mu_3) \|u_{xx}\|^2 \\ &\quad + a_1 \|u_{xt}\|^2 \\ &\geqslant \|u_t\|^2 + (\mu_1 - 1) \|u_x\|^2 + \mu_2 \|u\|^2 \\ &\quad + \mu_3 \|u_{xx}\|^2 + a_1 \|u_{xt}\|^2 \\ &\geqslant K_0 \|u\|_A^2,\ \forall u \in H^S_{0,\omega}(\Omega), \end{aligned} \tag{12.2.10}$$

其中 $K_0 = \min\{1, \mu_1 - 1, \mu_2, \mu_3, a_1\} > 0$ 是常数。引理证毕。

引理 12.2.7(山路引理[13])设 $J: X \to R$ 是 Banach 空间 X 上的 C^1 泛函, 并且满足 Palais - Smale 条件, 进一步假定

(1) $J(0) = 0$;

(2)存在实数 $r > 0$, $\delta > 0$ 使得: 当 $\|u\|_X = r$ 时, $J(u) \geqslant \delta$;

(3)存在 $u_0 \in X$, $\|u_0\|_X > r$ 满足 $J(u_0) < \delta$。则

$$\beta = \inf_{h \in \Phi} \max_{t \in [0,1]} J(h(t))$$

是泛函 J 的一个临界值，其中

$$\Phi = \{h \mid h:[0,1] \to X \text{ 连续, 且 } h(0) = 0,\ h(1) = u_0\}.$$

注:引理中所言"J 满足 Palais - Smale 条件"是指对每一个满足

(i) $|J(u_n)| \leq M,\ \forall n \in N$, (其中 $M > 0$ 是常数)

和

(ii) $\lim\limits_{n\to\infty} J'(u_n) = 0$ 的 X 中的序列 $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$，都存在着收敛子序列。

满足(i)及(ii)的序列称为 Palais - Smale 序列。

第三节　问题(12.1.1) - (12.1.3)非平凡弱解的存在性

定义 12.3.1　如果 $u \in H_{0,\omega}^{S}(\Omega)$ 满足

$$A(uv) = \int_0^{\omega}\int_0^1 u_x^2 v_x \mathrm{d}x\mathrm{d}t,\ \forall v \in H_{0,\omega}^{S}(\Omega), \tag{12.3.1}$$

则称 u 是问题(12.1.1) - (12.1.3)的弱解.

在 $H_{0,\omega}^{S}(\Omega)$ 中定义泛函 $J(u)$ 为

$$J(u) = \frac{1}{2}A(u,u) - \frac{1}{3}a_2\int_0^{\omega}\int_0^1 u_x^3 \mathrm{d}x\mathrm{d}t,\ \forall u \in H_{0,\omega}^{S}(\Omega). \tag{12.3.2}$$

易知 J 是连续 Fréchet 可导的，且它在 u 处的导数为

$$< J'(u), v > = A(u,v) - a_2\int_0^{\omega}\int_0^1 u_x^2 v_x \mathrm{d}x\mathrm{d}t,\ \forall v \in H_{0,\omega}^{S}(\Omega), \tag{12.3.3}$$

其中 $<\cdot,\cdot>$ 表示对偶积。

为了寻找满足(12.3.1)的弱解，下面将寻找泛函 $J(u)$ 的临界点。

引理 12.3.1　(12.3.2)式定义的泛函满足 Palais - Smale 条件。

证明　设 $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 $H_{0,\omega}^{S}(\Omega)$ 泛函 J 的 Palais - Smale 序列，则

$$\lim_{n\to\infty} J'(u_n) = 0,$$

因而对 $\forall\varepsilon>0$, $\exists N(\varepsilon)\in N$, 使得当 $n>N(\varepsilon)$ 时,

$$\left|<J'(u_n),\frac{v}{\|v\|_A}>\right|<\varepsilon,\ \forall v\in H^S_{0,\omega}(\Omega)\qquad(12.3.4)$$

成立。

由(12.3.3)和(12.3.4)得

$$\left|A(u_n,v)-a_2\int_0^\omega\int_0^1 u_{nx}^2 v_x\mathrm{d}x\mathrm{d}t\right|\leqslant\varepsilon\|v\|_A.\qquad(12.3.5)$$

在(12.3.5)中, 令 $v=u_n$, $\varepsilon=1$, 则

$$a_2\int_0^\omega\int_0^1 u_{nx}^3\mathrm{d}x\mathrm{d}t\leqslant A(u_n,u_n)+\|u_n\|_A,\ n>N(1).\qquad(12.3.6)$$

注意到 $\left|J(u_n)\right|\leqslant M$, 由(12.3.6)及(12.2.8)式, 得到

$$\begin{aligned}M\geqslant J(u_n)&=\frac{1}{2}A(u_n,u_n)-\frac{1}{3}a_2\int_0^\omega\int_0^1 u_{nx}^3\mathrm{d}x\mathrm{d}t\\&\geqslant\frac{1}{2}A(u_n,u_n)-\frac{1}{3}A(u_n,u_n)-\frac{1}{3}\|u_n\|_A\\&=\frac{1}{6}A(u_n,u_n)-\frac{1}{3}\|u_n\|_A\\&\geqslant\frac{1}{6}K_0\|u_n\|_A^2-\frac{1}{3}\|u_n\|_A,\end{aligned}$$

即

$$K_0\|u_n\|_A^2-2\|u_n\|_A-6M\leqslant0.\qquad(12.3.7)$$

这表明 $\|u_n\|_A$ 有界。从而 $\{u_n\}_{n=1}^\infty$ 是 $H^S_{0,\omega}(\Omega)$ 中的有界序列。

由(12.3.5)式, 对 $\forall\varepsilon>0$, 存在 $N(\varepsilon)\in N$, 当 $n,m>N(\varepsilon)$ 时,

$$\begin{aligned}A(u_n-u_m,u_n-u_m)&\leqslant|A(u_n,u_n-u_m)|+|A(u_m,u_n-u_m)|\\&\leqslant2\varepsilon\|u_n-u_m\|_A\\&\quad+\left|\int_0^\omega\int_0^1 u_{nx}^2(u_{nx}-u_{mx})\mathrm{d}x\mathrm{d}t\right|\\&\quad+\left|\int_0^\omega\int_0^1 u_{mx}^2(u_{nx}-u_{mx})\mathrm{d}x\mathrm{d}t\right|.\end{aligned}\qquad(12.3.8)$$

注意到 u_n, $u_m \in H^S_{0,\omega}(\Omega)$，利用引理 12.2.3，有

$$u_{nx},\ u_{mx} \in L^3(\Omega). \tag{12.3.9}$$

利用(12.3.9)以及引理 12.2.5，得到

$$u_{nx}^2 \in L^{\frac{3}{2}}(\Omega),\ u_{mx}^2 \in L^{\frac{3}{2}}(\Omega). \tag{12.3.10}$$

由(12.3.8)式，利用 Hölder 不等式及(12.3.10)式，得

$$\begin{aligned} A(u_n - u_m,\ u_n - u_m) &\leqslant 2\varepsilon \| u_n - u_m \|_A \\ &+ (\| u_{nx}^2 \|_{L^{\frac{3}{2}}(\Omega)} + \| u_{mx}^2 \|_{L^{\frac{3}{2}}(\Omega)}) \| u_{nx} - u_{mx} \|_{L^3(\Omega)}. \end{aligned} \tag{12.3.11}$$

由于 $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ 在 $H^S_{0,\omega}(\Omega)$ 中有界，利用引理 12.2.3 知道，$\{u_{nx}\}_{n=1}^{\infty}$ 在 $L^3(\Omega)$ 中也是有界的；因而由引理 12.2.5 知道，$\{u_{nx}^2\}_{n=1}^{\infty}$ 在 $L^{\frac{3}{2}}(\Omega)$ 中有界。这样，存在常数 $K > 0$，使得

$$A \| u_n - u_m \|_A \leqslant K,\ \| u_{nx}^2 \|_{L^{\frac{3}{2}}(\Omega)} + \| u_{mx}^2 \|_{L^{\frac{3}{2}}(\Omega)} \leqslant K. \tag{12.3.12}$$

由(12.3.11)和(12.3.12)得

$$A(u_n - u_m,\ u_n - u_m) \leqslant 2\varepsilon K + K \| u_{nx} - u_{mx} \|_{L^3(\Omega)}. \tag{12.3.13}$$

利用(12.2.8)式，由(12.3.13)得

$$K_0 \| u_n - u_m \|_A^2 \leqslant 2\varepsilon K + K \| u_{nx} - u_{mx} \|_{L^3(\Omega)}. \tag{12.3.14}$$

此外，由引理 12.2.3 知道，$\{u_{nx}\}_{n=1}^{\infty}$ 在 $L^3(\Omega)$ 中包含有收敛子序列(仍然记为 $\{u_{nx}\}_{n=1}^{\infty}$)。因而在(12.3.14)的右端先令 $n, m \to \infty$，再令 $\varepsilon \to 0$ 取极限，知道 $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ 在 $H^S_{0,\omega}(\Omega)$ 中存在着 Cauchy 子序列。引理得证。

引理 12.3.2 由(12.3.2)式定义的泛函 $J(u)$ 在 $H^S_{0,\omega}(\Omega)$ 中存在非平凡临界点。

证明 根据引理 12.3.1，只要证明 $J(u)$ 满足引理 12.2.7 的条件(1)–(3)。显然 $J(0) = 0$。

易知对 $\forall \varepsilon > 0$，$\left|\frac{1}{3}u_x^3\right| \leqslant \varepsilon \left| u_x \right|^2 + \left|\frac{1}{3}u_x^3\right|$ 总成立。因而

$$
\begin{aligned}
J(u) &= \frac{1}{2}A(u,u) - \frac{1}{3}\int_0^\omega\int_0^1 u_x^3 \mathrm{d}x\mathrm{d}t \\
&\leqslant \frac{1}{2}A(u,u) - \varepsilon\int_0^\omega\int_0^1 u_x^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}t - \frac{1}{3}\int_0^\omega\int_0^1 |u_x^3|\ \mathrm{d}x\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2}A(u,u) - \varepsilon\|u_x\|^2 - \frac{1}{3}\|u_x\|_{L^3(\Omega)}^3. \qquad (12.3.15)
\end{aligned}
$$

由引理 12.2.3 知，存在常数 $K_1>0$，使

$$\|u_x\|_{L^3(\Omega)}^3 \leqslant K_1\|u\|_A^3. \qquad (12.3.6)$$

利用 Hölder 不等式及(12.3.16)，得

$$\|u_x\|^2 \leqslant \omega^{\frac{1}{3}}\Big|\ u_x\|_{L^3(\Omega)}^2 \leqslant \omega^{\frac{1}{3}}K_1^{\frac{2}{3}}\|u\|_A^2. \qquad (12.3.17)$$

由(12.3.15)－(12.3.17)，存在常数 $K_1, K_2>0$，使得

$$J(u) \geqslant \frac{1}{2}K_0\|u\|_A^2 - \varepsilon K_2\|u\|_A^2 - \frac{1}{3}K_1\|u\|_A^3. \qquad (12.3.18)$$

在(12.3.18)中取 $\varepsilon = \dfrac{K_0}{4K_2} > 0$，得

$$J(u) \geqslant \frac{1}{2}K_0\|u\|_A^2 - \frac{1}{3}K_1\|u\|_A^3 = \frac{1}{12}\|u\|_A^2(3K_0 - 4K_1\|u\|_A). \qquad (12.3.19)$$

取 $r = \dfrac{3K_0}{8K_1} > 0$，则当 $\|u\|_A = r$ 时，由(12.3.19)得

$$J(u) \geqslant \frac{1}{8}K_0\left(\frac{3K_0}{8K_1}\right)^2 = \delta > 0.$$

因而 $J(u)$ 满足引理 12.2.7 的(2)。

根据[14]，可以选择 $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$，满足

$$\int_0^\omega\int_0^1 \varphi_x^3 \mathrm{d}x\mathrm{d}t = M_1 > 0. \qquad (12.3.20)$$

对 $l>0$，利用(12.2.7)及(12.3.20)式，有

$$
\begin{aligned}
J(l\varphi) &= \frac{1}{2}A(l\varphi, l\varphi) - \frac{1}{3}\int_0^\omega\int_0^1 l^3\varphi_x^3 \mathrm{d}x\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2}A(l\varphi, l\varphi) - \frac{1}{3}l^3 M_1
\end{aligned}
$$

$$\leqslant \frac{1}{2}C_0 l^2 \|\varphi\|_A^2 - \frac{1}{3}l^3 M_1$$
$$= \frac{1}{2}C_0 l^2 (\|\varphi\|_A^2 - \frac{2M_1 l}{3C_0}).$$

在(12.3.21)中可取 l 充分大，使得 $\|l\varphi\|_A > r$，且 $J(l\varphi) \leqslant 0 < \delta$. 因而 $J(u)$ 满足引理 12.2.7 中的(3)。所以根据引理 12.2.7，泛函 $J(u)$ 在 $H^S_{0,\omega}(\Omega)$ 中存在非平凡临界点。引理证毕。

由引理 12.3.2 可知以下定理成立。

定理 12.3.3 如果 $\mu > 1$，则问题(12.1.1) - (12.1.3)存在具有任意周期 $\omega > 0$ 的时间周期弱解。

证明 由引理 12.3.2 容易知道，定理结论成立。

参考文献

[1] P. Rosenau. Dynamics of nonlinear mass - spring chains near the continumlimt[J]. Phys, Lett., 1986, 118A: 222 - 227.

[2] P. Rosenau. Dynamics of dense lattices[J]. Physical Review B, 1987, 36 (11): 5868 - 5876.

[3] 庄蔚，杨桂通. 孤波在非线性弹性杆中的传播[J]. 应用数学和力学，1986，7: 571 - 581.

[4] 张善元，庄蔚. 非线性弹性杆中的应变孤波[J]. 力学学报，1988，20(1): 58 - 67.

[5] M. Tsutsumi and T. Matahashi., On the Cauchy problem for the Boussinesq type equation[J]. Math. Japonica, 1991, 26 (2): 371 - 379.

[6] B. Straughan. Global nonexistence of solutions to some Boussinesq - type equations[J]. J. Math. Phys. Sci., 1992, 26: 155 - 164.

[7] F. Lineras. Global existence of small solutions for a generalized Boussinesq equation[J]. J. Diff. Eq., 1993, 106: 257 - 293.

[8] Liu Yue. Existence and blow up of solutions of a nonlinear Pochhammer – Chree equation[J]. Indiana Univ. Math. J, 1996, 45: 797 – 916.

[9] Chen Guowang, Wang Yanping, Wang Shubin. Initial boundary value problem of the generalized cubic double dispersion equation [J]. J. Math. Anal. Appl., 299(2004), 563 – 577.

[10] K. Pfl\"uger. Periodic solutions of non – linear anisotropic partial differential equations[J]. Math. Meth. Appl. Sci., 1996, 19: 363 – 374.

[11] O. Besov, V. Il'in and S. Nikol'skij. Integral Representations of Functions and Imbedding Theorems[M]. Vol. 1, Winston, Washington D. C., 1978.

[12] 张恭庆. 临界点理论及其应用[M]. 上海:上海科技出版社, 1986: 4 – 5.

[13] A. Ambrosetti and P. Rabinowtiz. Dual varitional methods in critical pint theory and applications[J]. J. Funct. Anal., 1973, 14: 349 – 381.

[14] G. S. Warnecke. \"Uber das homogene dirichlet – problem beinichtlinearen paritiellen differentialgleichungen vom typ der Boussinesq – Gleichung[J]. Math. Meth Appl. Sci., 1987, 9: 493 – 519.

第十三章 一类非线性双曲型方程 Cauchy 问题解的爆破

第一节 引言

在刻画 DNA 分子横向波的传播时提出了如下非线性双曲型方程[1-3]：

$$au_{tt} - u_{xxtt} = c(u^3)_{xx},$$

其中，a, b, $c > 0$ 是常数。本文研究上述模型方程广义形式下的初值问题

$$u_{tt} - u_{xxtt} = f(u)_{xx},\ (x,\ t) \in R \times (0,\ +\infty), \tag{13.1.1}$$

$$u(x,\ 0) = u_0(x),\ u_t(x,\ 0) = u_1(x),\ x \in R, \tag{13.1.2}$$

其中，$u(x,\ t)$ 是未知函数，$f(s)$ 是给定的非线性函数，$u_0(x)$ 和 $u_1(x)$ 是已知的初值函数，下标 t 和 x 表示关于 t 和 x 的偏导数。

本文将给出问题(13.1.1)，(13.1.2)解爆破的充分条件，并且证明问题局部广义解的存在性和唯一性。

文中使用如下的记号：$L^p(1 \leqslant p \leqslant \infty)$ 表示通常的 R 中的 L^p 函数空间，范数 $\|\cdot\|_p = \|\cdot\|_{L^p}$ 和 $\|\cdot\| = \|\cdot\|_2$；$W^{s,p}$ 表示通常的 R 上的 Sobolev 空间，具有范数 $\|f\|_{s,p} = \sum_{k=0}^{s} \|D^k f\|_p$，其中 $D^k f = \dfrac{\partial^k f}{\partial x^k}$，$s$ 是正整数，$1 \leqslant p \leqslant \infty$。

这里首先给出问题(13.1.1)，(13.1.2)局部解的存在性和唯一性的如下结果：

定理 13.1.1 假定 u_0, $u_1 \in W^{2,p} \cap L^\infty$，和 $f(s) \in C^3(R)$. 则问题(13.1.1)，(13.1.2)有唯一的局部广义解 $u(x,\ t) \in$

$C([0, T_0); W^{2,p} \cap L^\infty)$，其中 $[0, T_0)$ 是最大时间区间。

此定理的证明方法是：首先利用二阶偏微分方程的基本解将问题转化为与之等价的积分方程，然后利用压缩映射原理和积分估计得到结果[4]。

第二节　问题 (13.1.1)，(13.1.2) 整体解的不存在性

引理 13.2.1　假定 $f \in C(R)$，$F(s) = \int_0^s f(\tau)\mathrm{d}\tau$，$F(u_0) \in L^1$，$(-\partial_x^2)^{-\frac{1}{2}}u_1 \in L^2$，$u_0$，$u_1 \in L^2$，则 $u(x, t)$ 是问题(13.1.1)，(13.1.2)的解，

$$E(t) = \|(-\partial_x^2)^{-\frac{1}{2}}u_t(\cdot, t)\|^2 + \|u_t(\cdot, t)\|^2 + 2\int_R F(u)\mathrm{d}x = E(0), \tag{13.2.1}$$

其中，$(-\partial_x^2)^{-\alpha}u(x) = \chi^{-1}[|x|^{-2\alpha}\chi u(x)]$，$\chi$ 和 χ^{-1} 分别表示 R 中的 Fourier 变换和 Fourier 逆变换[5]。

证明　通过直接计算，利用方程(13.1.1)，有

$$\begin{aligned}\frac{d}{\mathrm{d}t}E(t) &= 2((-\partial_x^2)^{-\frac{1}{2}}u_{tt}, (-\partial_x^2)^{-\frac{1}{2}}u_t) + 2(u_{tt}, u_t) \\ &\quad + 2(f(u), u_t) \\ &= 2((-\partial_x^2)^{-1}u_{tt}, u_t) + 2(u_{tt}, u_t) + 2(f(u), u_t) \\ &= 2((-\partial_x^2)^{-1}u_{tt} + u_{tt} + f(u), u_t) = 0.\end{aligned}$$

其中 $(\cdot, \cdot)$ 表示 L^2 空间的内积。上述等式关于 t 积分，可得(13.2.1)。

引理 13.2.2[6] 假定正的二次可微函数 $H(t)$ 对 $\forall t \geqslant 0$，$\ddot{H}H - (1+\delta)\dot{H}^2 \geqslant 0$ 成立，其中 $\delta > 0$ 是常数。若 $H(0) > 0$，$\dot{H}(0) > 0$，则存在 $t_1 \leqslant \dfrac{H(0)}{\delta \dot{H}(0)}$，使得当 $t \to t_1$ 时，$H(t) \to \infty$。

定理 13.2.3　假定存在常数 $\mu > 0$，使得

$$sf(s) \leqslant 2(1+2\mu)F(s),\ \forall s \in R, \qquad (13.2.2)$$

并且 u_0，u_1 满足如下条件：

(1) $u_0,\ u_1 \in L^2,\ (-\partial_x^2)^{-\frac{1}{2}}u_0 \in L^2,\ (-\partial_x^2)^{-\frac{1}{2}}u_1 \in L^2,\ F(u_0) \in L^1$；

(2) $E(0) = \|(-\partial_x^2)^{-\frac{1}{2}}u_1\|^2 + \|u_1\|^2 + 2\int_R F(u_0)\mathrm{d}x < 0$，

则问题(13.1.1)，(13.1.2)的解 $u(x,t)$ 在有限时间爆破。

证明 假定问题(13.1.1)，(13.1.2)解存在的最大时间是无穷大。记

$$\varphi(t) = \|(-\partial_x^2)^{-\frac{1}{2}}u\|^2 + \|u\|^2 + \delta(t+t_0)^2, \quad (13.2.3)$$

其中 δ 和 t_0 是两个待定的非负常数。则

$$\dot{\varphi}(t) = 2((-\partial_x^2)^{-\frac{1}{2}}u_t,\ (-\partial_x^2)^{-\frac{1}{2}}u) + 2(u_t,\ u) + 2\delta(t+t_0).$$

利用 Schwartz 不等式，可得

$$\dot{\varphi}(t)^2 \leqslant 4\varphi(t)[\|(-\partial_x^2)^{-\frac{1}{2}}u_t\|^2 + \|u_t\|^2 + \delta] \qquad (13.2.4)$$

利用方程(13.1.1)和能量等式(13.2.1)，可得

$$\begin{aligned}
\ddot{\varphi}(t) &= 2((-\partial_x^2)^{-1}u_{tt},\ u) + 2(u_{tt},\ u) + 2\|(-\partial_x^2)^{-\frac{1}{2}}u_t\|^2 + 2\delta \\
&= 2\delta - (2+4\mu)E(0) + (2+4\mu)E(t) + 2\|(-\partial_x^2)^{-\frac{1}{2}}u_t\|^2 \\
&\quad + 2\|u_t\|^2 + 2(u,\ -f(u)) \\
&= 2\delta - (2+4\mu)E(0) \\
&\quad + (2+4\mu)[\|(-\partial_x^2)^{-\frac{1}{2}}u_t\|^2 + \|u_t\|^2 + 2\int_R F(u)\mathrm{d}x] \\
&\quad + 2\|(-\partial_x^2)^{-\frac{1}{2}}u_t\|^2 + 2\|u_t\|^2 + 2(u,\ -f(u)) \\
&= 2(u,\ -f(u)) + 2\delta - (2+4\mu)E(0) \\
&\quad + 4(1+\mu)\|(-\partial_x^2)^{-\frac{1}{2}}u_t\|^2 + 4(1+\mu)\|u_t\|^2 \\
&\quad + 2\int_R[2(1+2\mu)F(u) - uf(u)]dx, \qquad (13.2.5)
\end{aligned}$$

由(13.2.2) －(13.2.5)，得到

$$\varphi(t)\ddot{\varphi}(t) - (1+\mu)\dot{\varphi}(t)^2 \geqslant -2(1+2\mu)(E(0)+\delta)\varphi(t).$$

若 $E(0) < 0$，取 $\delta = -E(0) > 0$，由(13.2.5)得

$$\varphi(t)\ddot{\varphi}(t) - (1+\mu)\dot{\varphi}(t)^2 \geqslant 0 .$$

显然，如果 t_0 充分大，$\dot{\varphi}(0) > 0$. 由引理 13.2.2 知道，在最多等于 $T_0 = \dfrac{\varphi(0)}{\mu\dot{\varphi}(0)} < +\infty$ 的某时刻 T_1，$\varphi(t)$ 成为无穷大。这与解存在的最大时间是无穷大相矛盾，即解存在的最大时间是有限的。定理得证。

定理 13.2.4 假定不等式(13.2.2)成立。u_0, u_1 满足如下条件：

(1) $u_0, u_1 \in L^2$，$(-\partial_x^2)^{-\frac{1}{2}}u_0 \in L^2$，$(-\partial_x^2)^{-\frac{1}{2}}u_1 \in L^2$，$F(u_0) \in L^1$；

(2) $E(0) \geqslant 0$，并且

$$2((-\partial_x^2)^{-\frac{1}{2}}u_1, (-\partial_x^2)^{-\frac{1}{2}}u_0) + 2(u_1, u_0) > \sqrt{E(0)(\|(-\partial_x^2)^{-\frac{1}{2}}u_0\|^2 + \|u_0\|^2)},$$

则问题(13.1.1)，(13.1.2)的广义解 $u(x,t)$ 在有限时刻爆破。

证明 假定问题(13.1.1)，(13.1.2)的解存在的最大时间是无穷大。记

$$\varphi(t) = \|(-\partial_x^2)^{-\frac{1}{2}}u\|^2 + \|u\|^2,$$

与定理 13.2.3 的证明相同，可以得到

$$\varphi(t)\ddot{\varphi}(t) - (1+\mu)\dot{\varphi}(t)^2 \geqslant -2(1+2\mu)E(0)\varphi(t),$$

如果 $E(0) = 0$，则

$$\varphi(t)\ddot{\varphi}(t) - (1+\mu)\dot{\varphi}(t)^2 \geqslant 0.$$

由假定条件(2)知道 $\dot{\varphi}(0) > 0$。由引理 13.2.2 可知，知道，在最多等于 $T_0 = \dfrac{\varphi(0)}{\mu\dot{\varphi}(0)} < +\infty$ 的某时刻 T_1，$\varphi(t)$ 成为无穷大。

若 $E(0) > 0$，记 $y(t) = \varphi^{-\mu}(t)$，则

$$\dot{y}(t) = -\mu\varphi^{-\mu-1}(t)\dot{\varphi}(t),$$

$$\ddot{y}(t) = -\mu\varphi^{-\mu-2}(t)[\varphi(t)\ddot{\varphi}(t) - (1+\mu)\dot{\varphi}(t)^2]$$
$$\leqslant 2\mu(1+2\mu)\varphi^{\mu-1}(t)E(0), \tag{13.2.6}$$

由假定条件(2)知道 $\dot{y}(0) < 0$。

记 $\tilde{t} = \sup\{t \mid \dot{y}(\tau) < 0, \tau \in [0, t)\}$，根据 $\dot{y}(t)$ 的连续性，$\tilde{t}$ 是正的. 两端同乘以 $2\dot{y}(t) < 0$，得

$$\frac{d}{dt}[\dot{y}(t)]^2 \geqslant -4\mu^2(2\mu+1)E(0)\varphi^{-2\mu-2}(t)\dot{\varphi}(t)$$
$$= 4\mu^2 E(0)\frac{d}{dt}[\varphi^{-2\mu-1}(t)], \ \forall t \in [0, \tilde{t}), \tag{13.2.7}$$

对(9)两端在 $[0, t)$ 上积分 $(t \in [0, \tilde{t}))$，得

$$[\dot{y}(t)]^2 \geqslant 4\mu^2 E(0)\varphi^{-2\mu-1}(t) + [\dot{y}(0)]^2 - 4\mu^2 E(0)\varphi^{-2\mu-1}(0),$$

注意到假定条件(2)，成立着

$$[\dot{y}(0)]^2 - 4\mu^2 E(0)\varphi^{-2\mu-1}(0) > 0,$$

利用 $\dot{y}(t)$ 的连续性，可知

$$\dot{y}(t) \leqslant -\sqrt{[\dot{y}(0)]^2 - 4\mu^2 E(0)\varphi^{-2\mu-1}(0)} \tag{13.2.8}$$

对 $t \in [0, \tilde{t})$ 成立。由 $\tilde{t}$ 的定义知，(13.2.8)对所有的 $t \geqslant 0$ 成立。因此，

$$y(t) \leqslant y(0) - \sqrt{[\dot{y}(0)]^2 - 4\mu^2 E(0)\varphi^{-2\mu-1}(0)}\,t, \ \forall t > 0$$

则对某个对某个 $\tilde{T}$，有 $y(\tilde{T}) = 0$，其中

$$0 < \tilde{T} \leqslant T_0 = y(0)[\dot{y}(0)^2 - 4\mu^2 E(0)\varphi^{-2\mu-1}(0)]^{-\frac{1}{2}}.$$

因而，因而，$\varphi(t)$ 在时刻 $\tilde{T}$ 为无穷大。

这样，在定理的假定条件下，$\varphi(t)$ 总在有限时刻 $\tilde{T}$ 成为无穷大，这与解的最大存在时间是无穷大相矛盾。定理得证。

参考文献

[1] Peyrard M., Bisshop A. R., Statistical mechanics of a nonlinear model for DNA denaturation[J]. Physics Review Letter, 1989,

62: 2755 -2758.

[2] Muto V., Lomdahl P. S., Christiansen P. L., A two - dimensional discrete model for DNA dynamics: longitudinal wave propagation and denaturation[J]. Phyics Review A, Statics Physics Plasmas Fluids Related Interdiscipline Topics (USA), 1990, 42: 7452 -7458.

[3] Christiansen P. L., Lomdahl P. S., Muto V., On a toda lattice model with a transversal degree of freedom[J]. Nonlinearity, 1990, 4: 477 -501.

[4] Ladyzhenskaya O. A., Attractors for Semigroups and Evolution Equations[M]. London: Cambridge Univ. Press, 1991.

[5] Stein E. M., Singular Integral and Differentiability properties of Functions[M]. Princeton: Princeton University press, 1970.

[6] Levine H. A., Some additional remarks on the nonexistence of global solution to nonlinear wave equations[J]. SIAM J. Math. Anal., 1974, 5: 138 -146.

[7] Constantin A., Molinet L., The initial value problem for a generalized Boussinesq equation[J]. Diff. Int. Eqns., 2002, 15: 1061 -1072.

[8] Wang Shu - bin, Chen Guo - wang. Small amplitude solutions of the generalized IMBq equation [J]. J. Math. Anal. Appl., 2002, 274: 846 -866.

[9] Wang Shu - bin, Chen Guo - wang. Cauchy problem for the nonlinear schrodinger - IMBq equations[J]. Discrets and Continuous Dynamical Systems, 2006, B(6)(1): 203 -214.

第十四章　一类高阶非线性发展方程 Cauchy 问题解的爆破

第一节　引言

在晶格动力学和具有表面张力的水波的研究中，提出了如下的非线性双曲型方程[1-3]：

$$u_{tt} - u_{xx} + \mu u_{xxxx} - \alpha u_{xxtt} + \beta u_{xxxxtt} = f(u_x)_x,\ x \in R,\ t > 0, \tag{14.1.1}$$

其中μ, α, $\beta > 0$是已知的物理常数，$f(s)$是已知的非线性函数，$u(x, t)$表示未知函数，下标x和t表示求偏导数。模型方程(14.1.1)属于 Boussinesq 型方程。关于 Boussinesq 型方程的行波解、孤立子解和定解问题的有关研究结果，可以参看文献[4-11]及其内部的参考文献。

文献[12]研究了零表面张力的情况。

本文研究方程(14.1.1)具有初值条件

$$u(x, 0) = u_0(x),\ u_t(x, 0) = u_1(x),\ x \in R \tag{14.1.2}$$

的 Cauchy 问题，其中$u_0(x)$和$u_1(x)$是已知的定义在 R 上的初始函数。是已知的的函数。

对于问题(14.1.1)，(14.1.2)，有如下的结论：

定理 14.1.1　假定$u_0(x) \in H^4(R)$，$u_1(x) \in H^4(R)$，且$f \in C^6(R)$，并且$f'(s)$是下有界的，则问题(14.1.1)，(14.1.2)有唯一的整体广义解

$$u(x, t) \in C([0, \infty); H^4(R)) \cap C^1([0, \infty); H^4(R)) \cap C^2([0, \infty); H^4(R)).$$

定理 14.1.2　假定 $u_0(x) \in H^5(R)$，$u_1(x) \in H^5(R)$，且 $f \in C^7(R)$，并且 $f'(s)$ 是下有界的，则问题(14.1.1)，(14.1.2)有唯一的整体古典解

$$u(x,t) \in C([0,\infty);H^5(R)) \cap C^1([0,\infty);H^5(R)) \cap C^2([0,\infty);H^5(R)).$$

上述两个定理可以用标准的方法给出证明。

为了得到解的爆破，需要如下的引理：

引理 14.1.1[13-16]

假定正的二次可微函数 $H(t)$ 满足如下条件：

$$\ddot{H}(t)H(t) - (1+\lambda)\dot{H}(t)^2 \geqslant 0$$

对 $\forall t \geqslant 0$ 成立，其中 $\lambda > 0$ 是常数。这里和后面的"．" $= \frac{d}{dt}$。若 $H(0) > 0$ 和 $\dot{H}(0) > 0$ 成立时，存在 $t_1 \leqslant \frac{H(0)}{\lambda \dot{H}(0)}$，使得当 $t \to t_1$ 时，$H(t) \to \infty$。

主要定理　假定下面的条件成立：$f \in C(R)$，u_0，$u_1 \in H^2(R)$，$F(u_{0x}) \in L^1(R)$，其中 $F(s) = \int_0^s f(\rho)d\rho$。此外，存在常数 $\lambda > 0$ 使得

$$sf(s) \leqslant 2(1+2\lambda)F(s),\ \forall s \in R. \tag{14.1.3}$$

则当下面的条件之一满足时，问题(1.1)，(1.2)的广义解或古典解 $u(x,t)$ 在有限时刻发生爆破问题：

(1) $E(0) < 0$;

(2) $E(0) = 0$，$(u_0, u_1) + \alpha(u_{0x}, u_{1x}) + \beta(u_{0xx}, u_{1xx}) > 0$;

(3) $E(0) > 0$ 和 $(u_0, u_1) + \alpha(u_{0x}, u_{1x}) + \beta(u_{0xx}, u_{1xx}) > 2\sqrt{E(0)[\|u_0\|^2 + \|u_{0x}\|^2 + \beta\|u_{0xx}\|^2]} > 0$。

这里及后面的

$$E(t) = \|u_t(t)\|^2 + \|u_x(t)\|^2 + \mu\|u_{xx}(t)\|^2 + \alpha\|u_{xt}(t)\|^2 + \beta\|u_{xxt}(t)\|^2 + 2\int_{-\infty}^{+\infty} F(u_x(x,t))dx,$$

$$(14.1.4)$$

其中 $\|\cdot\|$ 表示空间 $L^2(R)$ 中的范数。

第二节　主要定理的证明

方程(14.1.1)的两端同乘以 $2u_t$，然后在 R 上积分，得到

$$\dot{E}(t)=0,\ t>0,$$

这表明

$$E(t)=E(0),\ t>0. \tag{14.2.1}$$

记

$$H(t)=\|u(t)\|^2+\alpha\|u_x(t)\|^2+2\beta\|u_{xx}(t)\|^2+2\gamma_0(t+\bar{t}^2), \tag{14.2.2}$$

γ_0 和 $\bar{t}$ 是待定的非负常数。因而

$$\dot{H}(t)=2(u,u_t)+2\alpha(u_x,u_{xt})+2\beta(u_{xx},u_{xxt})+2\gamma_0(t+\bar{t}).$$

利用 Schwartz 不等式，有

$$\dot{H}(t)^2\leqslant 4H(t)[\|u_t\|^2+\alpha\|u_{xt}\|^2+\beta\|u_{xxt}\|^2+\gamma_0]. \tag{14.2.3}$$

借助于方程(14.1.1)，(14.1.4)和能量等式(14.2.1)，有

$$\begin{aligned}\ddot{H}t)&=2\|u_t\|^2+2\alpha(u,u_{tt})+2\alpha\|u_{xt}\|^2+2\alpha(u_x,u_{xtt})\\&\quad+2\beta\|u_{xxt}\|^2+2\beta(u_{xx},u_{xx})+2\gamma_0\\&=2\|u_t\|^2+2\alpha\|u_{xt}\|^2+2\beta\|u_{xxt}\|^2+2\gamma_0\\&\quad+2(u,u_{xx}-\mu u_{xxxx}+f(u_x)_x)\\&=2\|u_t\|^2+2\alpha\|u_{xt}\|^2+2\beta\|u_{xxt}\|^2\\&\quad+2\gamma_0-2\|u_x\|^2-2\mu\|u_{xx}\|^2-2\int_{-\infty}^{+\infty}u_xf(u_x)\mathrm{d}x\\&=-(2+4\lambda)(E(0)+\gamma_0)+4(1+\lambda)(\|u_t\|^2+\alpha\|u_{xt}\|^2\\&\quad+\beta\|u_{xxt}\|^2+\gamma_0)+4\lambda\|u_x\|^2+4\lambda\mu\|u_{xx}\|^2\\&\quad+2\int_{-\infty}^{+\infty}[(1+2\lambda)F(u_x)-u_xf(u_x)]\mathrm{d}x.\end{aligned} \tag{14.2.4}$$

由(14.2.2)-(14.2.4)可得,

$$H(t)\ddot{H}(t)-(1+\lambda)\dot{H}(t)^2\geqslant-2(1+2\lambda)(E(0)+\gamma_0)H(t). \tag{14.2.5}$$

若 $E(0)<0$, 取 $\gamma_0=-E(0)>0$, 由(14.2.5)得

$$H(t)\ddot{H}(t)-(1+\lambda)\dot{H}(t)^2\geqslant 0. \tag{14.2.6}$$

显然, 如果 $\bar{t}$ 充分大, $\dot{H}(0)>0$。由引理 14.1.1 知道, 在最多等于 $\dfrac{H(0)}{\lambda\dot{H}(0)}<+\infty$ 的某时刻 t_0, $H(t)$ 成为无穷大。

如果 $E(0)=0$, 取 $\gamma_0=0$, 则(14.2.6)成立。注意到定理的假定条件中的(2), 有 $\dot{H}(0)>0$. 利用引理 14.1.1, 在最多等于 $\dfrac{H(0)}{\lambda\dot{H}(0)}<+\infty$ 的有限时刻 t_1, $H(t)$ 成为无穷大。

如果 $E(0)>0$, 取 $\gamma_0=0$, 则 $H(t)$ 满足

$$H(t)\ddot{H}(t)-(1+\lambda)\dot{H}(t)^2\geqslant-2(1+2\lambda)E(0)H(t).$$

定义 $I(t)=H^{-\lambda}(t)$, 则 $\dot{I}(t)=-\lambda H^{-\lambda-1}(t)\dot{H}(t)$, 以及

$$\begin{aligned}\ddot{I}(t)&=-\lambda H^{-\lambda-2}(t)[H(t)\ddot{H}(t)-(1+\lambda)\dot{H}(t)^2]\\&\leqslant 2\lambda(1+2\lambda)E(0)H^{-\lambda-1}(t).\end{aligned} \tag{14.2.7}$$

注意到定理中的(3), 有 $\dot{I}(0)<0$. $t^*=\sup\{t\mid \dot{I}(\tau)<0,\ \tau\in[0,t)\}$, 由 $\dot{I}(t)$ 的连续性可知, t^* 是正的。

(14.2.7)两端同乘以 $2\dot{I}(t)$, 得

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(\dot{I}(t)^2)&\geqslant-4(1+2\lambda)\lambda^2E(0)H^{-2\lambda-2}(t)\dot{H}(t)\\&=4\lambda^2E(0)\frac{d}{dt}H^{-2\lambda-1}(t),\ \forall t\in[0,t^*).\end{aligned} \tag{14.2.8}$$

(14.2.8)式两端在 $[0,t)$ 上积分 ($t\in[0,t^*)$), 可以得到

$$\dot{I}(t)^2 \geqslant \dot{I}(0)^2 + 4\lambda^2 E(0)[H^{-2\lambda-1}(t) - H^{-2\lambda-1}(0)]. \tag{14.2.9}$$

由定理中的假定条件(3)，可以知道成立着

$$\dot{I}(0)^2 - 4\lambda^2 E(0) H^{-2\lambda-1}(0) > 0. \tag{14.2.10}$$

利用 $\dot{I}(t)$ 的连续性，由(14.2.9)和(14.2.10)得，

$$\dot{I}(t) \leqslant -\sqrt{\dot{I}(0)^2 - 4\lambda^2 E(0) H^{-2\lambda-1}(0)}$$

对 $t \in [0, t^*)$ 成立。根据 $\tilde{t}$ 的定义，这个不等式对所有 $t \geqslant 0$ 成立。所以

$$I(t) \leqslant I(0) - t\sqrt{\dot{I}(0)^2 - 4\lambda^2 E(0) H^{-2\lambda-1}(0)},\ \forall t > 0.$$

所以，对某个 T_1，有 $I(T_1) = 0$，并且 $0 < T_1 \leqslant T_0$，其中

$$T_0 = I(0)[\dot{I}(0)^2 - 4\lambda^2 E(0) H^{-2\lambda-1}(0)]^{-\frac{1}{2}}.$$

因而，$H(t)$ 在时刻 T_1 为无穷大。定理得证。

注 14.2.1 (1)假定 $f(s) = as^p$，$p > 1$ 是偶数，$a \neq 0$. 取 $u_0(x) = qxe^{-x^2}$，$u_1(x) = qxe^{-x^2}$，其中 $aq > 0$，则对适当大的 $|q| > 0$，主要定理的条件得到满足。

(2)假定 $f(s) = as^p$，$p > 1$ 是奇数，$a < 0$. 则对适当大的 $|q| > 0$ ($q < 0$)，$u_0(x) = qxe^{-x^2}$ 和 $u_1(x) = qxe^{-x^2}$ 满足主要定理的条件。

参考文献

[1] P. Rosenau. Dynamics of nonlinear mass – spring chains near the continumlimt[J]. Phys, Lett., 1986, 118A: 222 – 227.

[2] P. Rosenau. Dynamics of dense lattices[J]. Physical Review B, 1987, 36(11): 5868 – 5876.

[3] G. Schneider, C. W. Eugene. Kayahara dynamics in dispersive media[J]. Physica D, 2001, 152 – 153: 384 – 394.

[4] M. Tsutsumi and T. Matahashi. On the Cauchy problem for the Boussinesq type equation[J]. Math. Japonica, 1991, 26 (2): 371 – 379.

[5] B. Straughan. Global nonexistence of solutions to some Boussinesq – type equations [J]. J. Math. Phys. Sci., 1992, 26: 155 – 164.

[6] F. Lineras. Global existence of small solutions for a generalized Boussinesq equation[J]. J. Diff. Eq., 1993, 106: 257 – 293.

[7] Liu Yue. Existence and blow up of solutions of a nonlinear Pochhammer – Chree equation[J]. Indiana Univ. Math. J., 1996, 45:797 – 916.

[8] Wang Yanping, Guo Boling. Blow – up of the solution for a generalized Boussinesq equation[J]. Applied Mathematics and Mechanics(English Editions), 2007, 28(11): 1437 – 1443

[9] 王艳萍, 郭柏灵. 一类非线性双曲型方程初边值问题解的爆破[J]. 数学物理学报, 2008, 28A(4): 688 – 693.

[10] 王艳萍, 郭柏灵. 一类广义 Boussinesq 型方程的 Cauchy 问题[J]. 数学年刊, 2008, 29A(2): 185 – 194; \\ The Cauchy problem for a Generalized Boussinesq type equation[J]. Chinese Journal of Contemporary Mathematics, 2008, 29A (2): 153 – 164.

[11] Chen Guowang, Wang Yanping, Wang Shubin. Initial boundary value problem of the generalized cubic double dispersion equation[J]. J. Math. Anal. Appl., 2004, 299: 563 – 577.

[12] Schneider G. The long wave limit for a boussinesq equation[J]. SIAM J. Appl. Math., 1998, 58: 1237 – 1245.

[13] H. A. Levine. Instability and nonexistence of global solutions to nonlinear wave equations of the form $Pu_{tt} = -Au + F(u)$[J]. Trans. American Math. Soc., 1974, 192:1 – 21.

[14] H. A. Levine. Some additional remarks on the nonexistence of global solutions to nonlinear wave equations[J]. SIAM J. Math. Anal., 1974, 5: 138-146.

[15] H. A. Levine. Some nonexistence and instability theorems for solutions of formally parabolic equations of the form $Pu_{tt} = -Au + F(u)$[J]. Trans American Arch Rat Mech Anal, 1973, 51: 271-386.

[16] V. K. Kalantarov, Ladyzhenskaya. The occurrence of collapse for quasilinear equations of parabolic and hyperbolic types[J]. J. Soviet Math, 1978, 10:53-70.